开卷·修习图　奇偶性篇

一正一反，相照成章。

第一重·识对称　先看定义域，再比较相反输入的输出，把式子与图像对应起来。

第二重·辨奇偶　用定义规范判断；注意零值、绝对值与分段。

第三重·借对称　根据一半补另一半，求函数值、解析式和参数。

第四重·会通　奇偶性与单调性联用，把输入归到同一个可比较的区间。

> 修习留白：每学完一重，回到这里写下自己会解决的问题。

我已练成：_____

还需回练：_____

奇偶 · 选路心法　先照入口，再看输出

第一关 | 验入口　定义域要关于原点对称。只要一个合法输入的相反数不合法，就既不是奇函数，也不是偶函数。

第二关 | 验法则　对定义域内任意 x，比较 $f(-x)$ 与 $f(x)$：同值为偶，互为相反数为奇；两种都可能成立，也可能都不成立。

借对称求值或补式　将未知输入变成相反数，送到已知一侧；偶函数输出不变，奇函数输出变号。分段代入时先判断新输入落在哪一段。

与单调联用　先验输入范围，再借奇偶性把比较对象转成同一区间内的函数值，最后按严格单调方向比较输入。

由奇偶求参数　若参数影响定义域，先用入口对称列条件；再用函数值关系求参数，代回检验。

> 我的心得：偶函数是相反输入、同样输出；奇函数是相反输入、相反输出。先确认两次输入都合法，再谈对应关系。奇函数只有在 0 属于定义域时，才必须满足 $f(0)=0$。

随手验一验　奇函数 f 定义在实数集上，且 $f(-2)=3$，则 $f(2)=-3$。

回验　已知哪一侧？_____；输出是否变号？_____

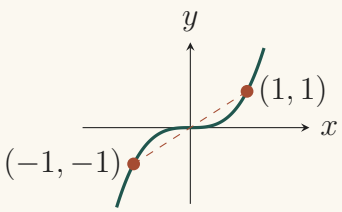
识对称 · 观象　太极八卦，一奇一偶

一正一反看照应，一转一映识奇偶。



太极相转

联想：原点对称

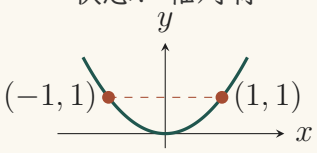


$y = x^3$：关于原点对称



八卦观象

联想：轴对称



$y = x^2$：关于 y 轴对称

由象入理：太极和八卦是引入对称的文化意象。太极图旋转半周时黑白互换；八卦图案不一定关于某条轴对称。判断函数的对称，以函数图像和对应关系为准。

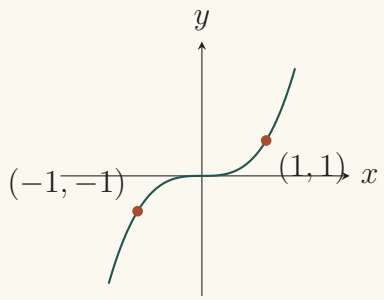
试着回填　奇函数：相反输入，输出_____；偶函数：相反输入，输出_____。

第一重 · 识对称　一正一反，输出如何照应

设函数 f 的定义域关于原点对称，下面的奇函数说法彼此等价：

式的语言　对定义域内任意 x，$f(-x)=-f(x)$，也就是 $f(x)+f(-x)=0$。

形的语言　函数图像关于原点对称：点 (x,y) 对应点 $(-x,-y)$。



> 先验入口：每个合法输入的相反数也必须合法；奇函数若在 0 处有定义，则 $f(0)=0$。

对照留白　偶函数对应的式与图分别是什么？

式：_____

图：_____

比值能否使用？　如果定义域内各点的函数值都不为零，奇函数还可写成 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$。有零值时，不能用比值代替定义。

第二重·辨奇偶　先查入口，再验法则

题目一　判断 $f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 的奇偶性。

解　由 $x-1\neq 0$ 且 $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$，得定义域为 $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$。其中 -1 属于定义域，而 1 不属于定义域，故定义域不关于原点对称，所以 f 既不是奇函数，也不是偶函数。

> 照入口：只要找到一个合法输入，其相反数不合法，就可排除奇、偶性；不必继续比较函数值。

题目二　判断 $g(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$ 的奇偶性。

解　由 $x^2-1\geq 0$ 且 $1-x^2\geq 0$，得定义域为 $\{-1,1\}$，关于原点对称。并且 $g(-1)=g(1)=0$，因此对定义域内每个 x，既有 $g(-x)=g(x)$，又有 $g(-x)=-g(x)$，所以 g 既是奇函数也是偶函数。

> 零值细看：定义域对称且所有函数值为零时，两种关系同时成立。

辨奇偶 · 再进一招　绝对值与分段

题目一　判断函数 $h(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的奇偶性。

解　由 $1-x^2\geq 0$ 得 $-1\leq x\leq 1$。在此区间上 $x+2>0$，故 $|x+2|-2=x$；分母不为零，所以定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$，关于原点对称。

在定义域内，$h(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，于是 $h(-x)=-h(x)$。故 h 为奇函数。

> 先定范围，再去绝对值：化简依据来自定义域，且原式的分母限制仍须保留。

题目二　判断 $p(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\geq 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$ 的奇偶性。

解　定义域为实数集。两段均可写成 $p(x)=x^2+|x|$，故对任意实数 x，$p(-x)=x^2+|x|=p(x)$，因此 p 为偶函数。

辨奇偶 · 分段代入　负号进门，先看落在哪一段

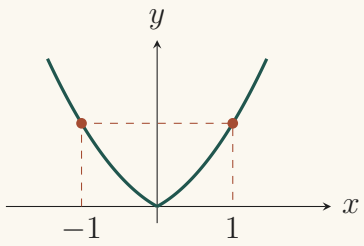
题目　设 $p(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\geq 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$ 用定义证明 $p(x)$ 是偶函数。

证明　函数定义域为 $\mathbb{R}$，关于原点对称。

当 $x>0$ 时，$-x<0$，因此 $p(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x=p(x)$。

当 $x<0$ 时，$-x>0$，因此 $p(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x=p(x)$。

当 $x=0$ 时，$p(-x)=p(x)=0$。综上，对任意实数 x，都有 $p(-x)=p(x)$，故 p 为偶函数。



换段不换规矩：求 $p(-x)$ 时，先判断 $-x$ 的符号，再选择对应的法则。图像帮助发现对称，证明仍要检验所有输入。

辨奇偶 · 和差成双　原式与镜像

题目　已知函数 $F(x)$ 的定义域为实数集。判断 $F(x)+F(-x)$ 与 $F(x)-F(-x)$ 的奇偶性。

解　设 $E(x)=F(x)+F(-x)$，$O(x)=F(x)-F(-x)$。对任意实数 x，

$$E(-x)=F(-x)+F(x)=E(x),\qquad O(-x)=F(-x)-F(x)=-O(x).$$

因此 E 是偶函数，O 是奇函数。

> 照镜成双：交换 x 与 $-x$，和不变，差变号；这里两次输入都要在定义域内。

进一招　如果 $F(x)=x^2+3x+1$，将它写成一个偶函数与一个奇函数的和。

解　令 $E(x)=\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}=x^2+1$，$O(x)=\dfrac{F(x)-F(-x)}{2}=3x$，则 E 为偶函数，O 为奇函数，且 $F(x)=E(x)+O(x)$。

第三重 · 借对称　已知半边，补出另一边

题目　设 f 是定义在实数集上的奇函数，当 $x \le 0$ 时 $f(x) = 2x^2 - x$。求 $f(1)$，并求 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的解析式。

解　$f(-1) = 2(-1)^2 - (-1) = 3$，由奇函数性质得 $f(1) = -f(-1) = -3$。

当 $x > 0$ 时，$-x < 0$，所以 $f(-x) = 2x^2 + x$。由 $f(x) = -f(-x)$ 得

$$\boxed{f(x) = -2x^2 - x, \qquad x > 0.}$$

借半边：先把要求的正输入变成负输入，再用已知一段；奇函数最后改变输出符号。

变式　已知 $F(x) = ax^3 + bx + 2$，$F(2) = 10$，求 $F(-2)$。

解　$F(2) + F(-2) = 4$，故 $F(-2) = -6$。

借对称 · 偶函数补式　把未知的一侧照回已知的一侧

题目　已知 g 是定义在实数集上的偶函数，当 $x<0$ 时，$g(x)=\dfrac{x}{x-1}$。求 $x>0$ 时 $g(x)$ 的解析式。

解　当 $x>0$ 时，$-x<0$，由已知的左侧解析式可得

$$g(-x)=\frac{-x}{-x-1}=\frac{x}{x+1}.$$

又因为 g 是偶函数，所以 $g(x)=g(-x)$。因此，当 $x>0$ 时，

$$\boxed{g(x)=\frac{x}{x+1}.}$$

照回来：先用 $-x$ 进入已知的负半轴，再用偶函数的同值关系返回正半轴。题目没有提供 $g(0)$ 的具体值，无须补出。

借对称 · 求参数　入口与法则都要照

题目一　设 $f(x)=ax^2+bx+c$，定义域为 $[-2a-3,1]$，且 f 为偶函数，求 a,b。

解　定义域关于原点对称，故 $-2a-3=-1$，得 $a=-1$。对于该定义域内任意 x，由 $f(-x)=f(x)$ 得 $-2bx=0$；取 $x=1$，得 $b=0$。因此 $\boxed{a=-1,b=0}$。

题目二　函数 $g(x)=\dfrac{(x+1)(x+a)}{x}$ 取自然定义域。若 g 为奇函数，求 a。

解　定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称。展开得

$$g(x)=x+(a+1)+\frac{a}{x}.$$

由 $g(-x)=-g(x)$ 得 $2(a+1)=0$，故 $a=-1$。代入得 $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$，符合奇函数定义，因此 $\boxed{a=-1}$。

> 由性返参：先用定义域的对称性，再用函数值关系；求出参数后回验。

借对称·条件求参　绝对值的折点在哪里

题目　已知函数 $f(x)=x^2-|x+a|$ 是定义在实数集上的偶函数，求实数 a 的值。

解　由偶函数定义，对任意实数 x，$f(-x)=f(x)$，所以

$$x^2-|a-x|=x^2-|a+x|,$$

即对任意实数 x，$|a-x|=|a+x|$。两边平方，得

$$(a-x)^2=(a+x)^2,\quad \text{即}\quad 4ax=0.$$

取 $x=1$，可得 $a=0$。

当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2-|x|$，对任意实数 x 有 $f(-x)=f(x)$，符合题意。故 $\boxed{a=0}$。

图形理解：绝对值部分的折点横坐标是 $-a$；它要与本来关于 y 轴对称的 x^2 配合，最终仍关于 y 轴对称。代数证明中，先由偶函数得到对所有输入成立的等式，再选方便的输入。

会通 · 照见另一侧　同为上升，镜中方向如何

题目　已知函数 f 的定义域关于原点对称，且在 $[1,2]$ 上严格递增。分别在 f 为偶函数、奇函数的条件下，判断它在 $[-2,-1]$ 上的单调性。

解　任取 $-2 \le x_1 < x_2 \le -1$，则 $1 \le -x_2 < -x_1 \le 2$。由 f 在 $[1,2]$ 上严格递增，得

$$f(-x_2) < f(-x_1).$$

若 f 为偶函数，则 $f(-x_i) = f(x_i)$，所以 $f(x_2) < f(x_1)$，即 f 在 $[-2,-1]$ 上严格递减。

若 f 为奇函数，则 $f(-x_i) = -f(x_i)$，所以 $f(x_2) > f(x_1)$，即 f 在 $[-2,-1]$ 上严格递增。

> 照势心法：偶函数，两侧方向相反；奇函数，对应两侧方向相同。这里比较的是对称区间，不能仅凭两侧各自单调便断定跨越中间的整个区间单调。

第四重 · 会通　奇偶与单调

题目　已知 f 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数，且在该区间上严格递减。解不等式 $f(m-1)+f(2m-1)>0$。

解　两个输入均在定义域内，故

$$-2<m-1<2,\qquad -2<2m-1<2,$$

解得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}$。

由奇函数性质，$f(2m-1)=-f(1-2m)$，原不等式等价于

$$f(m-1)>f(1-2m).$$

因为 f 在 $(-2,2)$ 上严格递减，故 $m-1<1-2m$，得 $m<\dfrac{2}{3}$。与定义域条件合并，得解集

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right).}$$

化语为式：奇函数把“加一个函数值”变为“比较两个函数值”；递减性再把大小翻译为相反的输入顺序。

会通 · 偶与单调　先归同一侧

题目　已知 f 是定义在 $(-2,2)$ 上的偶函数，且在 $[0,2)$ 上严格递减。解不等式 $f(m-1)>f(2m-1)$。

解　两个输入在定义域内，得 $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}$。由偶函数性质，原不等式等价于

$$f(|m-1|)>f(|2m-1|).$$

两输入都在 $[0,2)$ 上，由严格递减得 $|m-1|<|2m-1|$。两边非负，平方化简得 $m(3m-2)>0$，即 $m<0$ 或 $m>\dfrac{2}{3}$。结合定义域，解集为

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right).}$$

照到同侧：偶函数使 $f(u)=f(|u|)$；比较之前，确认绝对值后的输入在已知单调区间内。

收功 · 回验　式与形互照

偶函数留白　对定义域内每个 x，$f(-x)=f(x)$，即 $f(x)-f(-x)=0$；图像关于 y 轴对称。

入谱练习　$y=x^2$ 是偶函数；$y=x^3$、$y=\dfrac{1}{x}$ 是奇函数。它们的定义域都关于原点对称。

续谱　学过的新函数：_____；奇偶性：_____

我能解决：_____