开卷·修习图　单调性篇

气贯长虹，此为升；气沉丹田，此为降。

一段走势，几种语言；看得见升降，还要写得出推理、用得上题目。

本篇修习次第

第一重　识升降　从输入与输出的顺序，认识升、降；对照填出减函数的几种表达。

第二重　认底谱　认清常见函数的走势，找转折、找分界；新学一类，补进一类。

第三重　练证明　任取两点，用作差五步写出规范证明；体会变形与判号的不同难处。

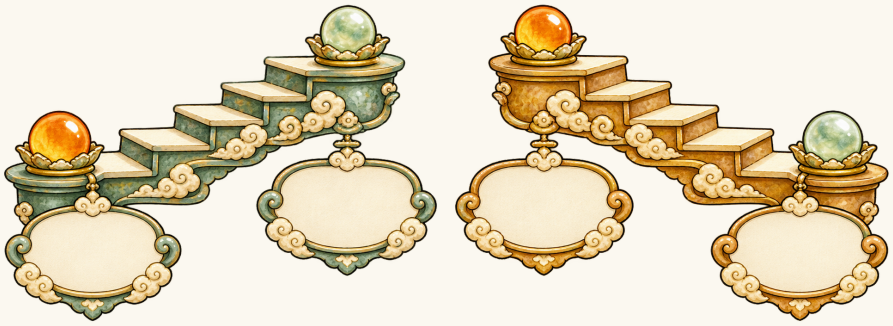
第四重　会运用　借单调性画图、求值域、比较大小、解不等式、求参数。

第五重　过难关　区分条件强弱，处理分段接缝、定义域和单调性的共同限制。

> 修习留白：学完一重，回来写下自己能解决的问题。

我已练成：_____

还需回练：_____



单调 · 选路心法　先辨升降，再看题目要什么

先说清区间　单调性描述同一区间内任意两个输入的对应变化；函数在两段分别递增，不代表能跨断点合成一段。

证明：任取两点，作差判号　任取区间内 $x_1 < x_2$，作差、变形、判号、下结论。变形要利用区间条件，不是只把式子算开。

比较函数值：先找输入　两个输入在同一单调区间，先比输入；增函数同向，减函数反向。跨区间时不能直接套用，要先转到可比较的区间。

解不等式：先验范围　两个函数值有意义后，再利用严格单调性把函数值的大小转成输入的大小；别漏掉定义域限制。

求参数：把条件落到图或式　二次函数看区间与对称轴的位置；分段函数先查各段，再查接缝处跨段的大小。求出后再回验。

> 我的心得：题目说“严格递增”，我就能在同一区间里由输入比输出，也能由输出反比输入；看到“递减”则方向相反。会翻译，才能把性质用起来。

随手验一验　$f(x) = (x-1)^2$。由于 $1 < 2 < 3$，且 f 在 $[1, +\infty)$ 上递增，所以 $f(2) < f(3)$。

回验　两个输入都在哪个区间？_____

一气升降　单调性的几种语言

气贯长虹，此为升；气沉丹田，此为降。

输入向前走，输出怎样变？同一条变化规律，可以用文字、式子和图像表达。



第一式 · 观升　设 f 在区间 I 上有定义，下列说法等价。

听其言　f 在区间 I 上严格递增。

辨先后　对 I 内任意 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$。

看乘积　对 I 内任意 $x_1 \neq x_2$，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$。

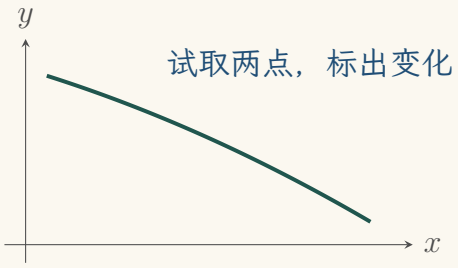
看差商　对 I 内任意 $x_1 \neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$。

观其形　图像从左往右呈上升趋势。

> 同向而行：输入、输出的大小方向相同；两个差同号，乘积与差商都为正。

第二式 · 悟降　照着观升，自己补全

设 f 在区间 I 上严格递减。先看图，再把对应的数学语言填出来。



辨先后　对区间 I 内任意 $x_1 < x_2$，都有 _____

看乘积　对区间 I 内任意 $x_1 \neq x_2$，都有

_____

看差商　对区间 I 内任意 $x_1 \neq x_2$，都有

_____

观其形　从左往右看，图像呈 _____ 趋势。

> 想一想：输入增大时，输出怎样变化？两个差同号还是异号？乘积和差商各是什么符号？

图上取两点是为了看懂变化；证明单调性，要考察区间内任意符合条件的两点。

第三式 · 比大小　先辨升降，再比函数值

题目　已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$，比较 $f(1+\sqrt{2})$ 与 $f(1+\sqrt{3})$ 的大小。

解　因为 $f(x)=(x-1)^2+2$，所以 f 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增。

又因为 $1<1+\sqrt{2}<1+\sqrt{3}$，所以两个输入都在该递增区间内，从而

$$f(1+\sqrt{2})<f(1+\sqrt{3}).$$

> 借势比较：先找两个输入所在的单调区间，再按增减方向比较函数值。

一招再练　已知 $g(x)=x^2-4x+5$，比较 $g(2-\sqrt{2})$ 与 $g(2-\sqrt{3})$ 的大小。

第二重 · 认底谱　熟悉一类，收录一类

认函数，先看它的定义域；找变化，留意分界与折返。以下区间分别书写。

一、一次函数　$y = kx + b$，定义域为实数。

当 $k > 0$ 时，在实数上递增；当 $k < 0$ 时，在实数上递减；当 $k = 0$ 时是常数函数。

二、反比例函数　$y = \dfrac{k}{x}$，其中 $k \neq 0$，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$。

当 $k > 0$ 时，在 $(-\infty, 0)$、$(0, +\infty)$ 上分别递减；当 $k < 0$ 时，在这两个区间上分别递增。

> 守界：两个单调区间分别写，不能用并集连成一个单调区间。比如 $-1 < 1$，但 $f(-1) = -1 < f(1) = 1$，因此 $\dfrac{1}{x}$ 在整个定义域上并非递减。

三、二次函数　$y = ax^2 + bx + c$，其中 $a \neq 0$，对称轴为 $x = -\dfrac{b}{2a}$。

开口向上：轴左递减，轴右递增；开口向下：轴左递增，轴右递减。

四、分式函数　$y = \dfrac{cx + d}{ax + b}$，其中 $a \neq 0$。

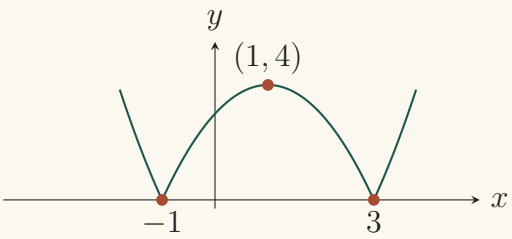
$$y = \frac{c}{a} + \frac{ad - bc}{a(ax + b)}, \qquad x \neq -\frac{b}{a}.$$

先化成常数加反比例函数，再按系数判断两侧走势；若 $ad - bc = 0$，则在定义域上为常数，断点仍须保留。

新入谱的函数：_____　转折或分界：_____

底谱 · 折返　先找分界，再辨方向

题目一　求 $f(x)=|x^2-2x-3|$ 的单调区间。



解　内部二次式的零点为 $-1,3$，对称轴为 $x=1$。将横轴下方的图像翻到上方，可得：

$$\text{递减区间：}(-\infty,-1],\quad [1,3];$$
$$\text{递增区间：}[-1,1],\quad [3,+\infty).$$

> 认路：零点决定翻折的边界，原二次函数的对称轴决定中间一段的转折。

题目二　求 $g(x)=x^2-2|x|$ 的单调区间。

解　因为 $g(x)=(|x|-1)^2-1$，分别在 $x<0$ 和 $x\geq 0$ 上考察，可得

$$\text{递减区间：}(-\infty,-1],\quad [0,1];$$
$$\text{递增区间：}[-1,0],\quad [1,+\infty).$$

入谱练习　求 $h(x)=|x+1|+|x-2|$ 的单调区间，并标出其中的常数区间。

> 分段寻势：先找绝对值内部为零的位置，再看每段如何变化。常数段要说清楚，不算严格递增或严格递减。

第三重 · 练证明　作差五步

任取两点 → 作差 → 变形 → 判号 → 结论

题目　用单调性的定义证明：$f(x)=-x^3+1$ 在实数范围上严格递减。

证明　任取实数 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= x_2^3-x_1^3 \\ &= (x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2). \end{aligned}$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，且 x_1,x_2 不可能同时为零。于是

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}>0.$$

因此 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$。根据单调性的定义，f 在实数范围上严格递减。

> 炼差：变形的目标是让各因式的符号看得见。这里用平方和判正，还要说明两点不能同时为零。

练证明 · 再进一招　区间条件参与判号

题目　用单调性的定义证明：$g(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $(0,2)$ 上严格递减。

证明　任取 x_1,x_2，满足 $0<x_1<x_2<2$，则

$$\begin{aligned} g(x_1)-g(x_2) &= (x_1-x_2)+4\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) \\ &= (x_1-x_2)\left(1-\frac{4}{x_1x_2}\right). \end{aligned}$$

因为 $x_1-x_2<0$，且 $0<x_1x_2<4$，所以 $1-\dfrac{4}{x_1x_2}<0$。因此

$$g(x_1)-g(x_2)>0,\quad \text{即}\quad g(x_1)>g(x_2).$$

根据单调性的定义，g 在 $(0,2)$ 上严格递减。

两题对照：上一题靠平方和判号；本题必须用上两点所在的区间。作差后要追问：哪些因式的符号，能由题目条件确定？

试一试　用单调性的定义证明：分式函数 $h(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上严格递增。

第四重·会运用 单调性能做什么

画图识势、求值域、比大小、解不等式、求参数，都可以借用单调性。

题目 已知函数 f 的定义域为 $(-2,2)$，且在该区间上严格递增，解不等式

$$f(a) > f(2a-1).$$

解 由两个函数值有意义，得

$$-2 < a < 2, \qquad -2 < 2a-1 < 2,$$

解得 $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{3}{2}$。

由于 f 在 $(-2,2)$ 上严格递增，原不等式等价于 $a > 2a-1$，解得 $a < 1$。

综合以上条件，原不等式的解集为

$$\boxed{\left(-\frac{1}{2},1\right).}$$

化语为式：“函数值有意义”化为两个输入都在定义域内；“严格递增”使函数值的大小转化为输入的大小。先验入口，再脱外衣。

借势求值域 求 $y = x^2 - 2x + 2$ 在 $[-1,2]$ 上的值域。

解 配方得 $y = (x-1)^2 + 1$。该函数在 $[-1,1]$ 上递减，在 $[1,2]$ 上递增，且 $f(1) = 1$、$f(-1) = 5$、$f(2) = 2$。因此最小值为 1，最大值为 5；又函数在区间上连续，中间的值都能取到，所以值域为 $[1,5]$。

条件求参　同一函数，四种说法

题目　已知 $f(x)=-x^2+mx+1$。分别求满足下列条件的实数 m。

① 在 $(-\infty,2]$ 上递增，且在 $[2,+\infty)$ 上递减；

② 在 $(-\infty,2]$ 上递增；

③ 单调递增区间为 $(-\infty,2]$；

④ 在 $[2,4]$ 上单调。

解　对称轴为 $x=\dfrac{m}{2}$，函数在轴左递增，在轴右递减。

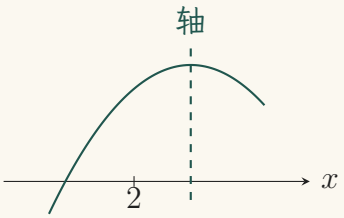
① 先增后减的转折点在 2，所以 $\dfrac{m}{2}=2$，得 $m=4$。

② 指定区间要位于轴左侧，故 $\dfrac{m}{2}\geq 2$，得 $m\geq 4$。

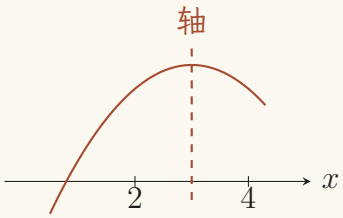
③ 由二次函数的单调递增区间为 $(-\infty,\dfrac{m}{2}]$，得 $\dfrac{m}{2}=2$，所以 $m=4$。

④ 轴不能落在 $(2,4)$ 内，故 $\dfrac{m}{2}\leq 2$ 或 $\dfrac{m}{2}\geq 4$，得 $m\leq 4$ 或 $m\geq 8$。

> 辨语言：“在这一段递增”只要求该段落在递增区间内；“单调递增区间为这一段”由整段递增区间确定轴的位置。



② 轴在 2 的右侧示意



④ 轴在区间内则不单调

第五重 · 过难关　分段衔接

题目　设

$$f(x)=\begin{cases} ax-1, & x<1,\\ x^2+1, & x\geq 1. \end{cases}$$

若 f 在实数范围上严格递增，求实数 a 的取值范围。

解　左段 $ax-1$ 严格递增，需要 $a>0$；右段 x^2+1 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增。

当 $a>0$ 时，任取 $x_1<1\leq x_2$，有

$$f(x_1)=ax_1-1<a-1,\qquad f(x_2)=x_2^2+1\geq 2.$$

若 $a-1\leq 2$，则跨段严格递增；若 $a-1>2$，取充分接近 1 的左侧输入，函数值大于 $f(1)=2$，与递增矛盾。故须且只须 $a\leq 3$。

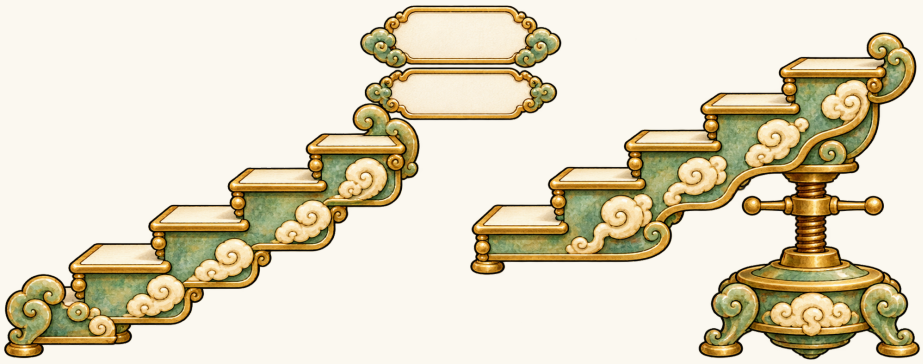
因此实数 a 的取值范围为

$$\boxed{0<a\leq 3.}$$

> 接缝也要比：各段都递增，还需比较一左一右的输入。$a=3$ 时左段的值始终小于 2，所以等号可以取。

再过一关　若 $y=\sqrt{ax+1}$ 在 $[0,1]$ 上有意义且严格递减，求 a 的范围。

解　根号函数递增，故严格递减要求 $a<0$。又因为在整个区间上有意义，须有 $a+1\geq 0$，所以 $-1\leq a<0$。



底谱·再探　一次与倒数同在

题目　讨论 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的单调区间，其中 $x\neq 0$。

解　对同一半轴上的 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right).$$

当 $a\le 0$ 时，第二个因式为正，函数在 $(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 上分别严格递增。

当 $a>0$ 时，分别在两侧以 $-\sqrt{a}$、$\sqrt{a}$ 为分界，比较 x_1x_2 与 a，得到：

$$\begin{aligned}&\text{递增区间：}(-\infty,-\sqrt{a}],\quad[\sqrt{a},+\infty);\\&\text{递减区间：}[-\sqrt{a},0),\quad(0,\sqrt{a}].\end{aligned}$$

> 注意入口：即使 $a=0$，原式仍要求 $x\neq 0$；两侧单调区间分别写。

回验·悟降　依次填 $f(x_1)>f(x_2)$、乘积小于零、差商小于零、下降。

回验·比大小　$g(x)=(x-2)^2+1$ 在 $(-\infty,2]$ 上严格递减。因为 $2-\sqrt{3}<2-\sqrt{2}<2$，所以 $g(2-\sqrt{2})<g(2-\sqrt{3})$。

回验·底谱练习　$|x+1|+|x-2|$ 在 $(-\infty,-1]$ 上严格递减，在 $[-1,2]$ 上为常数，在 $[2,+\infty)$ 上严格递增。

回验·作差练习　任取 $-1<x_1<x_2$，则

$$h(x_2)-h(x_1)=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0.$$

因此 $h(x_2)>h(x_1)$，根据单调性的定义，h 在 $(-1,+\infty)$ 上严格递增。

回章首写下：我能解决_____。