开卷·修习图　图像轻功篇

画形识势，察形知意；凌波微步，一点领全图。

第一重·画图　认基础图形，找关键点，分段守住边界。

第二重·识图　从图上读取定义域、值域、单调性等信息。

第三重·用图　用交点数根，用上下关系解不等式。

第四重·凌波微步　先追踪一个点，再掌握平移、对称、伸缩与翻折。

> 修习留白：画图、识图、用图互相照应；每学一种新函数，把图形与关键性质补入底谱。

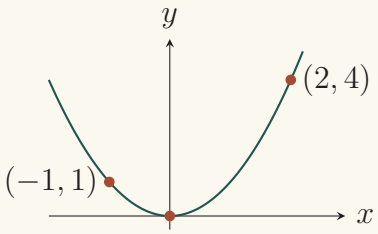
我会画的图：_____

我会用图解决：_____

第一重 · 画图　一组对应，落成一点

题目　已知 $f(x)=x^2$。求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(2)$，并写出对应的图像上的点。

解　$f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(2)=4$；对应的点分别为 $(-1,1)$、$(0,0)$、$(2,4)$。

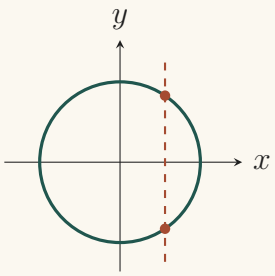


> 观点：横坐标是输入，纵坐标是对应的输出；图像由所有合法输入所对应的点组成。

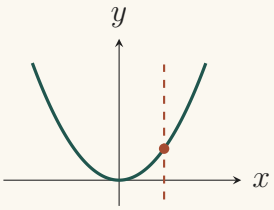
验图　同一横坐标若对应两个不同纵坐标，该图形就不能表示一个函数。

入门 · 验图　一条竖线，能否穿过两点？

题目　判断下列两幅图能否表示函数图像，并说明理由。



圆：同一输入有两个输出



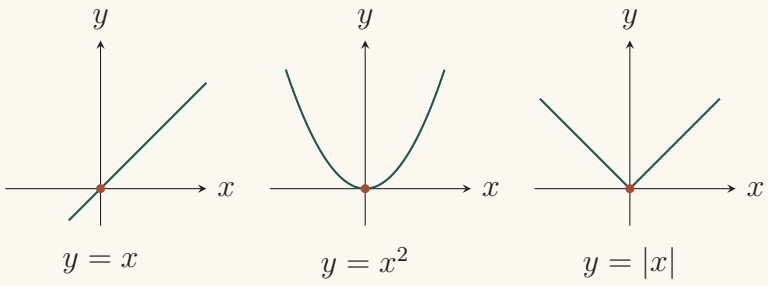
抛物线：每个输入只有一个输出

解　左图中，同一横坐标对应两个不同的纵坐标，不能表示函数；右图中，每一个横坐标都只有一个对应的纵坐标，可以表示函数。

> 竖线验身：任意竖线与图形至多有一个交点，才能表示函数。竖线没有交点时，只说明这个输入不在定义域中。

底谱 · 原型　先认识几位老朋友

题目　观察下列图像，分别说出关键点、定义域和变化趋势。

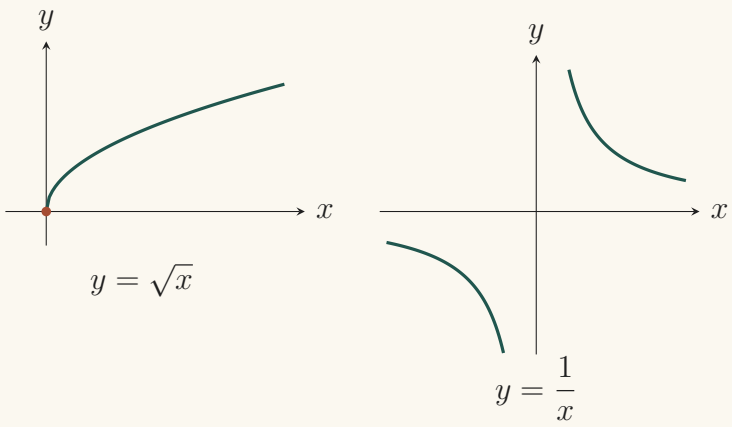


解　三个函数的定义域都是 $\mathbb{R}$，图像都经过原点。$y=x$ 在实数范围内递增；$y=x^2$ 和 $y=|x|$ 均在 $(-\infty,0]$ 上递减，在 $[0,+\infty)$ 上递增。

> 认图有法：直线看倾斜，抛物线看开口和顶点，绝对值看折点。改变定义域时，要先截取图像再读性质。

我新认识的函数图像：_____

底谱 · 续收　有起点，也有不能跨过的界



观察　$y=\sqrt{x}$ 从原点出发，定义域和值域都是 $[0,+\infty)$。$y=\dfrac{1}{x}$ 有两支，定义域和值域都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

> 入谱：根式看起点，反比例看两支；反比例函数的图像以坐标轴为参照，但不与坐标轴相交。

以后学到的图像：_____

关键点与变化：_____

底谱·总览　看形入谱，熟一类添一类

图像不是一幅幅孤立的画。先认熟悉的原型，再看它是怎样折、怎样移、怎样组合而来。

第一层｜认基础　直线、抛物线、绝对值、根式、反比例：看关键点、入口和走势。

第二层｜认变形　平底锅图像由两个绝对值相加形成；拱桥形图像可从二次函数翻折得到。

第三层｜认组合　对钩函数把一次项与反比例项放在一起；一次分式先化成“常数加反比例”。

入谱五看　看定义域；找关键点与边界；辨对称与走势；看值域；想它能帮我解决什么题。

> 我的心得：看见新函数，先问“它像哪位老朋友？”再问“多了什么动作、少了哪些输入？”原型能帮我起笔，条件决定我能画到哪里。

以后学到的新原型：_____

我能由原型看出的性质：_____

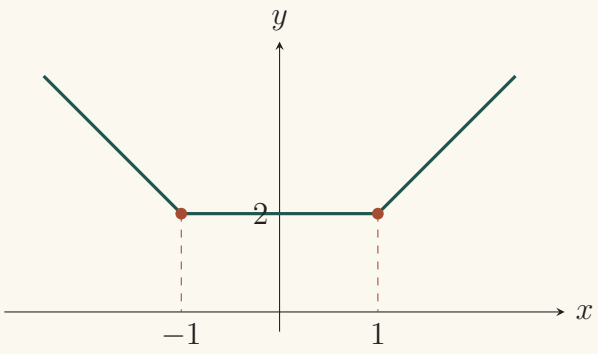
底谱 · 平底锅　两端抬起，中间走平

题目　作出函数 $f(x)=|x+1|+|x-1|$ 的图像，写出单调区间和值域。

解　两个绝对值的内部为零的位置是 -1 和 1。分段去绝对值，得

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ 2, & -1\le x\le 1,\\ 2x, & x>1.\end{cases}$$

据此画出图像；它在 $(-\infty,-1]$ 上递减，在 $[-1,1]$ 上为常数，在 $[1,+\infty)$ 上递增，值域为 $[2,+\infty)$。

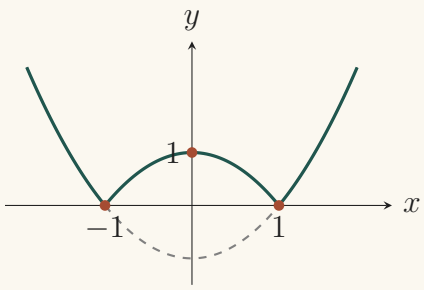


我的心得：先找分界点，再逐段去绝对值。这一题也可看成数轴上一点到 -1 和 1 的距离之和：点落在两点之间，距离和恰是两点间距 2，于是出现平底。

底谱 · 拱桥变形　先画抛物线，再把低处翻上来

题目　作出 $f(x)=|x^2-1|$ 的图像，讨论方程 $f(x)=a$ 的不同实根个数。

解　先画 $y=x^2-1$。它在 $-1<x<1$ 时位于 x 轴下方，将这一段关于 x 轴翻到上方，其余部分保留，得到所求图像。



由水平直线与图像的交点数可知：$a<0$ 时无根；$a=0$ 时有 2 根；$0<a<1$ 时有 4 根；$a=1$ 时有 3 根；$a>1$ 时有 2 根。

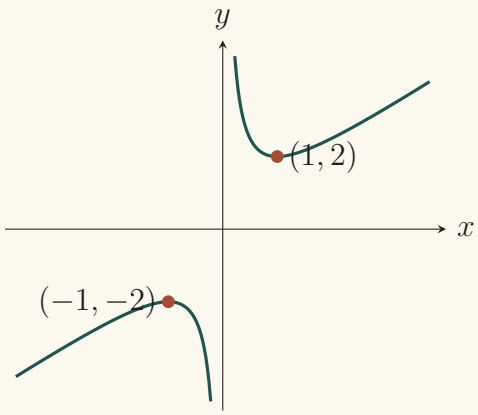
> 我的心得：这幅图的中间像一座拱桥。桥从哪里来？不是凭形状猜出来，而是把原图中轴下的一段翻上来。数根时盯住桥脚和桥顶，经过它们时交点数可能变化。

底谱 · 对钩　一次加倒数，两支各认路

题目　研究 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域、单调区间和最值情况，并画出图像的大致形状。

解　定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。函数为奇函数；在正半轴上，利用作差可得：在 $(0,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增。由奇对称，负半轴上在 $(-\infty,-1]$ 上递增，在 $[-1,0)$ 上递减。

在正半轴的最小值为 2，在负半轴的最大值为 -2；整个定义域上既无最大值，也无最小值。



我的心得：先守住 $x\neq 0$，两支不能跨过断点连成一段。先看一边的转折，再用奇对称补另一边；半轴上的最值不能直接当成全体定义域上的最值。

底谱 · 桥函数　同是一次与倒数，相减走出另一番模样

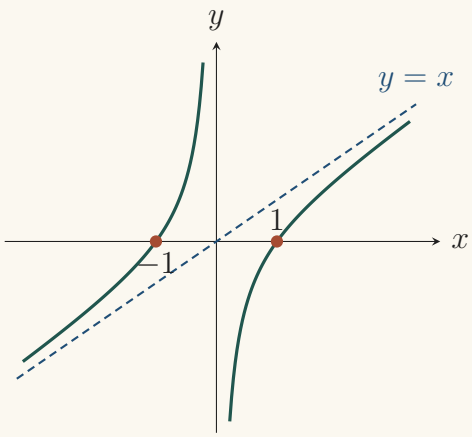
题目　研究函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 的定义域、奇偶性和单调性，并画出图像的大致形状。

解　定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称。对定义域内任意 x，$f(-x)=-f(x)$，故 f 为奇函数。

任取同一侧的 $x_1<x_2$，有 $x_1x_2>0$，且

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right)>0.$$

因此函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别严格递增。令 $f(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$。



我的心得：与 $x+\dfrac{1}{x}$ 对照：加号时每一支有转折；减号时两支分别一路上升。斜虚线 $y=x$ 是两端靠近的参照线，$x=0$ 处没有图像，两支不能跨过去合写成一个单调区间。

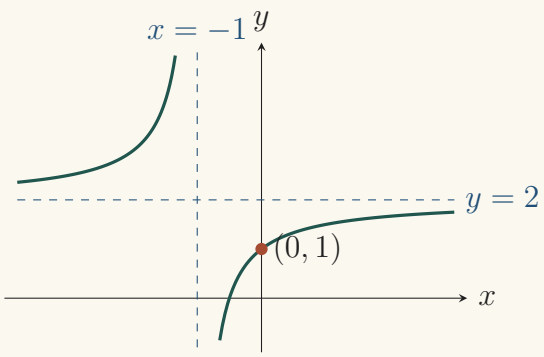
底谱 · 一次分式　拆出老朋友，先定两条线

题目　作出 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ 的图像，写出定义域、值域和各单调区间。

解　原式中 $x+1\neq 0$。将分子拆成 $2(x+1)-1$，得

$$f(x)=2-\frac{1}{x+1}.$$

从 $y=-\dfrac{1}{x}$ 的图像出发，左移 1 个单位、上移 2 个单位，得到所求图像。定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$；函数在两个定义域区间上分别严格递增。



我的心得：先拆成“常数加反比例”，两条参照线 $x=-1$、$y=2$ 帮我安放两支；再取一点检验位置。两支分别递增，不能合写成跨越 -1 的一个单调区间。

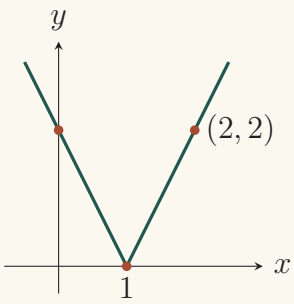
画图 · 立骨架　先认原型，再找关键点

题目　画函数 $y=|2x-2|$ 的图像，并指出它的单调区间。

解　$y=2|x-1|$。由 $x-1=0$ 得折点 $(1,0)$；再取 $(0,2)$、$(2,2)$。因为

$$y=\begin{cases}2-2x, & x<1,\\ 2x-2, & x\geq 1,\end{cases}$$

两段分别是直线，按对应范围连接可得图像。



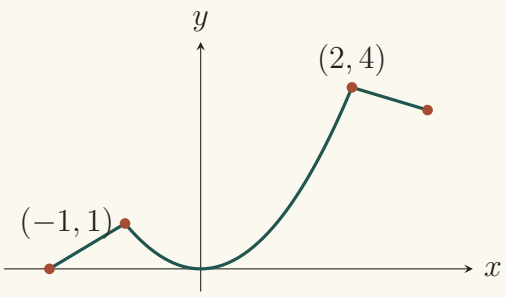
函数在 $(-\infty,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增。

> 立骨架：先找折点，再各取一点；连成直线依据的是分段式，而不只是三个点。

画图 · 分段守界　各画各段，端点验身

题目　画函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1,\\ x^2, & -1<x<2,\\ 5-\dfrac{x}{2}, & 2\le x\le 3. \end{cases}$ 的图像。

解　第一段是线段，取端点 $(-2,0)$、$(-1,1)$；中间画抛物线在 $-1<x<2$ 的部分；第三段是线段，取端点 $(2,4)$、$(3,\dfrac{7}{2})$。

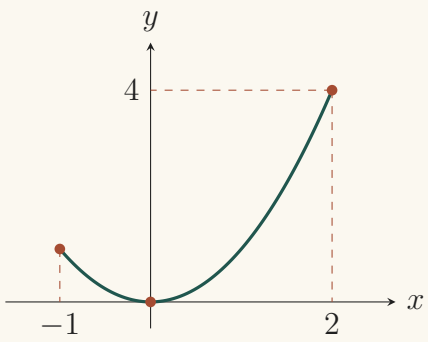


端点细看：中段不含 -1、2，但两个对应点分别由第一段和第三段提供，因此整图上仍是实点。

第二重 · 识图　从图读输入、输出与走势

题目　函数 $f(x)=x^2$ 的定义域限定为 $[-1,2]$。求它的值域和各单调区间。

解　这段抛物线最低点为 $(0,0)$，最高点为 $(2,4)$，覆盖其间全部高度，所以值域为 $[0,4]$；在 $[-1,0]$ 上递减，在 $[0,2]$ 上递增。



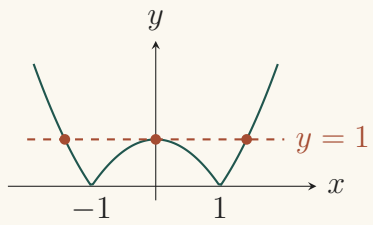
> 投影读域：从图像向横轴看输入范围，向纵轴看实际覆盖的高度；单调区间看从左往右的走势。

一招再练　若定义域改为 $(-1,2)$，值域是什么？输出 1 是否还存在？

第三重 · 用图　交点数根，上下比大小

题目一　设 $f(x)=|x^2-1|$，讨论方程 $f(x)=a$ 的实数根的个数。

解　若 $a<0$，无根；若 $a=0$，有两根 $x=\pm1$；若 $0<a<1$，有四根；若 $a=1$，有三根；若 $a>1$，有两根。



横线数根：方程的根对应图像与水平直线的交点；横线经过折点、顶点时，交点数可能改变。

题目二　利用图像思想解不等式 $x^2<2x+3$。

解　两图交点的横坐标满足 $x^2=2x+3$，得 $x=-1$ 或 $x=3$。在两个交点之间，抛物线 $y=x^2$ 位于直线 $y=2x+3$ 下方，因此解集为 $(-1,3)$。

上下比较：先找交点，再找哪一段满足图像的高低关系，最后把横坐标范围写成解集。

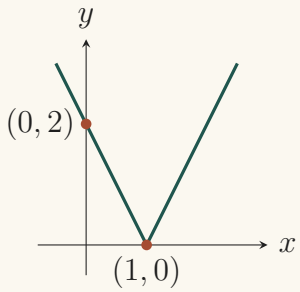
用图 · 以形还式　先认模型，再请关键点入座

题目　已知函数 $f(x)=a|x-b|+c$ 的图像折点为 $(1,0)$，且经过点 $(0,2)$。求 $f(x)$。

解　由折点为 (b,c)，得 $b=1$，$c=0$，所以 $f(x)=a|x-1|$。

又因为图像经过点 $(0,2)$，所以 $2=a|0-1|$，解得 $a=2$。

因此 $\boxed{f(x)=2|x-1|}$。

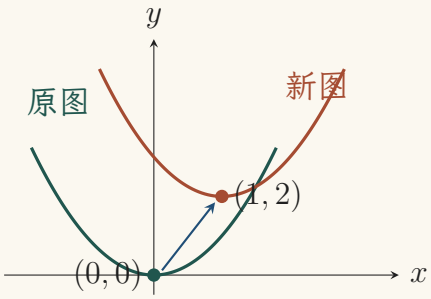


看题眼：题目已给出绝对值模型，折点锁定位置，再用图上一点锁定系数。仅凭几个点，并不能确定任意函数。

第四重 · 凌波微步　先搬一点，再搬全图

题目　将 $y=x^2$ 的图像向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，求所得图像的解析式，并写出顶点的新坐标。

解　原图上点 (u,u^2) 平移到 $(u+1,u^2+2)$。设新点横坐标为 x，则 $u=x-1$，所以新图解析式为 $y=(x-1)^2+2$。原顶点 $(0,0)$ 平移到 $(1,2)$。



> 点领全图：向右移后，新位置减去平移量，才找到原输入；向上移则在输出上加。

再练　将 $y=f(x)$ 的图像向左移 2 个单位，再向下移 3 个单位，写出新解析式。

凌波 · 镜映　照哪一面镜

题目　已知 $y=f(x)$ 的图像上有点 $(2,3)$。分别写出它关于 x 轴、y 轴、原点对称后的点，并写出对应的新图像解析式。

解　关于 x 轴对称：$(2,-3)$，新图为 $y=-f(x)$。

关于 y 轴对称：$(-2,3)$，新图为 $y=f(-x)$。

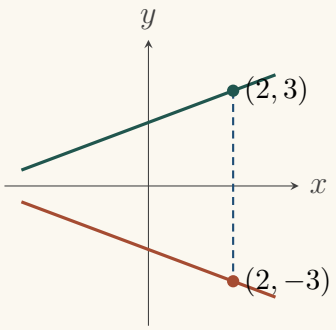
关于原点对称：$(-2,-3)$，新图为 $y=-f(-x)$。

> 照点辨式：关于 x 轴改变纵坐标，关于 y 轴改变横坐标；整图每一个点都这样变化。

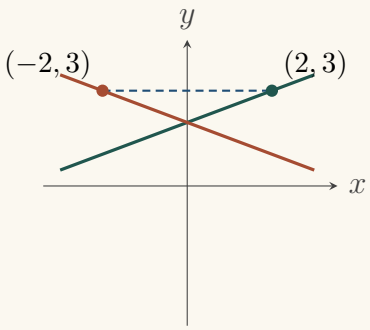
一招再练　将 $y=(x-1)^2$ 的图像关于 y 轴对称，求新解析式及顶点坐标。

照镜看变化：同一幅原图，三种照法

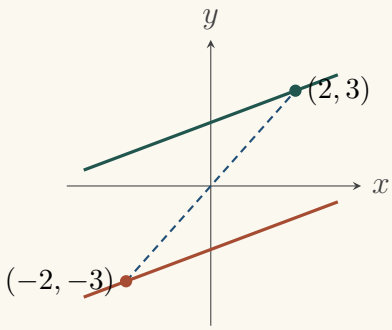
以 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+2$ 为例，绿色是原图，红色是对称后的图像。



照 x 轴
$y=-f(x)$



照 y 轴
$y=f(-x)$



照原点
$y=-f(-x)$

照横轴，纵坐标变号；照纵轴，横坐标变号；照原点，两个坐标都变号。

凌波 · 伸缩　输入变化和输出变化分开看

题目　已知 $y=f(x)$ 的图像上有点 $(2,3)$。分别求该点在 $y=2f(x)$ 与 $y=f(2x)$ 的图像上对应的点。

解　对 $y=2f(x)$，横坐标不变，纵坐标变为原来的 2 倍，对应点为 $(2,6)$。

对 $y=f(2x)$，令 $2x=2$，得 $x=1$，纵坐标仍为 3，对应点为 $(1,3)$。

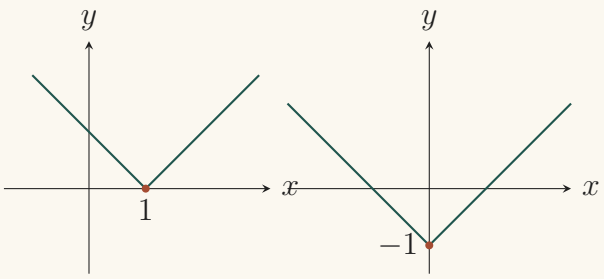
> 先找旧输入：式内变成 $2x$，要让它等于旧输入 2，新横坐标才是 1；式外乘 2 改变纵坐标。

凌波 · 翻折　两种绝对值，两种动作

题目　由 $y=x-1$ 的图像，分别说明如何得到 $y=|x-1|$ 与 $y=|x|-1$ 的图像。

解　对 $y=|x-1|$，横轴上方部分保留，下方部分关于横轴翻到上方，折点为 $(1,0)$。

对 $y=|x|-1$，先保留原图的右半边，再将右半边关于 y 轴对称到左侧，折点为 $(0,-1)$。



$y=|x-1|$　　$y=|x|-1$

辨结构：绝对值包住整个输出，是翻横轴下方；绝对值作用于输入，是用右半边生成左半边。一般情形还要检查 $|x|$ 是否属于原函数的定义域。

凌波·连招与逆行　每一步作用于当前图

题目　从 $y=x^2$ 出发，先向右移 1 个单位，再关于 x 轴对称，最后向上移 2 个单位。求最终解析式。

解　三步依次得到 $y=(x-1)^2$、$y=-(x-1)^2$、$y=-(x-1)^2+2$。

逆行　从最终图像返回 $y=x^2$：先下移 2 个单位，再关于 x 轴对称，最后左移 1 个单位。

> 撤招：按相反顺序撤销每一步；每一步都作用于当前图像。

凌波·辨先后　同样两招，次序可以改变结果

题目　将 $y=(x-1)^2$ 的图像分别按下列顺序变换，求所得解析式与顶点坐标。

（1）先向右平移 2 个单位，再关于 y 轴对称；

（2）先关于 y 轴对称，再向右平移 2 个单位。

解　（1）先右移，得 $y=(x-3)^2$；再关于 y 轴对称，得 $y=(-x-3)^2=(x+3)^2$，顶点为 $(-3,0)$。

（2）先关于 y 轴对称，得 $y=(-x-1)^2=(x+1)^2$；再右移，得 $y=(x-1)^2$，顶点为 $(1,0)$。

> 搬点验招：原顶点是 $(1,0)$。第一种走法：$1\to 3\to -3$；第二种走法：$1\to -1\to 1$。同样两招，顺序不同，落点也可能不同。

凌波 · 逆行　倒着撤招，再正向回验

题目　将函数 $f(x)$ 的图像先关于 y 轴对称，再向上平移 1 个单位、向右平移 1 个单位，得到 $y=x^2$ 的图像。求 $f(x)$。

解　设关于 y 轴对称后得到的函数为 $g(x)$。最后所得图像左移 1、下移 1，得到 g 的图像，故

$$g(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x.$$

再将其关于 y 轴对称，得到

$$\boxed{f(x)=g(-x)=x^2-2x.}$$

回验　$f(x)$ 关于 y 轴对称后为 x^2+2x；上移 1 得 $(x+1)^2$，再右移 1 得 x^2，符合题意。

> 撤招心法：最后一步先撤；平移反向撤回，对称再做一次。算完之后沿原路走一遍。

凌波 · 合招　旧点到新点

题目　若点 (u,v) 在 $y=f(x)$ 的图像上，且 $B\neq 0$，写出它在 $y=Af(Bx+C)+D$ 的图像上对应的点。

解　因为 $v=f(u)$，令新横坐标 x 满足 $Bx+C=u$，得 $x=\dfrac{u-C}{B}$。对应的新纵坐标为 $Av+D$，故所求的点是

$$\boxed{\left(\frac{u-C}{B},\ Av+D\right).}$$

> 旧输入不变：先让式内的 $Bx+C$ 等于旧横坐标，再按式外的操作改变纵坐标。适用时还要关注原函数的定义域。

一招再练　原图上的点 $(2,3)$ 在 $y=-2f(2x-1)+1$ 的图像上对应哪个点？

凌波 · 总心法　先看改哪里，再想点怎么走

一幅图像的变化，最终都要落实到图上每个点。先看作用的是输入还是输出，再追踪一个点验证方向。

一、平移　上下改变输出，左右寻找旧输入。对 $a>0$：

$$y=f(x)+a\text{：向上移}a\text{；}\quad y=f(x)-a\text{：向下移}a\text{；}$$
$$y=f(x-a)\text{：向右移}a\text{；}\quad y=f(x+a)\text{：向左移}a\text{。}$$

> 记一记：上下同号，左右反号。这里的左右口诀只针对 $f(x\pm a)$：若括号里还有系数，先整理结构，再用点坐标验证。

二、伸缩　当 $k>0$ 时，$y=kf(x)$ 让纵坐标变为原来的 k 倍；$y=f(kx)$ 让横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{k}$ 倍。

> 记一记：外乘看纵，里面看横；横向倍数取倒数。若出现负号，还要结合对应坐标轴的对称；系数为零时不能套用横向倒数的说法。

三、照镜　$y=-f(x)$ 照 x 轴，$y=f(-x)$ 照 y 轴，$y=-f(-x)$ 照原点。

动手验一验　原图点 $(2,3)$ 到 $y=f(2x)$ 上变成 $(1,3)$；到 $y=2f(x)$ 上变成 $(2,6)$。

凌波 · 翻折心法　绝对值在外与在内，各有走法

第一式 | $y=|f(x)|$：看输出，翻低处

先画 $y=f(x)$：① 位于 x 轴上方及轴上的部分保留；② 位于 x 轴下方的部分，关于 x 轴翻到上方；③ 擦去原来轴下的部分。定义域不变。

第二式 | $y=f(|x|)$：看输入，借右边

先画 $y=f(x)$：① 保留 $x\geq 0$ 的部分；② 擦去原图 $x<0$ 的部分；③ 将保留的右侧图像关于 y 轴对称，补到左侧。要先检查原函数在非负输入上有没有定义；若有 $x=0$，轴上的点只保留一次。

> 我的口诀：外面有绝对值，留下上面、翻上下面；里面有绝对值，保留右边、镜照左边。先分清绝对值包住的是输出还是输入，动作才不会串。

对照题　由 $f(x)=x-1$ 的图像，分别作出 $y=|f(x)|$ 和 $y=f(|x|)$。

解　前者为 $y=|x-1|$，折点是 $(1,0)$；后者为 $y=|x|-1$，折点是 $(0,-1)$。两图分别见前面的“凌波·翻折”。

收招四问　输入有没有被限制？这一步改横还是改纵？原图哪一部分保留？关键点到哪里？

收功 · 回验　把图像变成能用的招式

识图再练　定义域为 $(-1,2)$ 时，$y=x^2$ 的值域为 $[0,4)$；1 仍可由输入 1 取到。

平移再练　$y=f(x)$ 左移 2、下移 3，所得解析式为 $y=f(x+2)-3$。

镜映再练　所得解析式为 $y=(x+1)^2$，顶点为 $(-1,0)$。

合招再练　令 $2x-1=2$，得 $x=\dfrac{3}{2}$，新纵坐标为 $-2\times 3+1=-5$，对应点为 $\left(\dfrac{3}{2},-5\right)$。

我会画的基础函数：_____

我已掌握的图像变换：_____