开卷·修习图　定义域篇

寻源明法，先问何处可行。

函数从输入出发。哪些输入被允许？定义域收下所有合格的输入，组成一个集合。

第一重　识关　认识各种运算的条件，补全自己的入口总纲。

第二重　守关　逐条列条件、取交集；约分和嵌套也要记住原来的限制。

第三重　传关　函数的输入变成一个整体，先检查整体本身，再送入原函数。

第四重　逆关　从定义域反找参数或原函数的入口，分清“全部”和“一部分”。

> 修习留白：每学会一关，回来写下自己能解决的一类问题；新学的运算，继续添进入口总纲。

我已练成：_____

还需回练：_____

寻源·选路心法　先辨题型，再守入口

第一问｜这道题要我找谁的入口？　先圈出所求函数的输入变量，看题目有没有另给范围；它与式子里的限制都要保留。

一式同守：取公共部分　一个式子同时含根式、分母等运算，逐条列出所有条件，让它们同时成立。

分段各守：先分后合　每段先在自己的输入范围内求合法部分；不同段之间再合并。不要把不同段的法则要求同时加在同一个输入上。

整体入关：传递限制　已知 f 的定义域，求 $f(g(x))$ 的定义域：既要 $g(x)$ 自身有意义，也要 $g(x)$ 落在 f 的定义域中。

逆向寻源：分清要求　已知复合函数的定义域反求原函数入口时，要考虑整体 $g(x)$ 实际能到哪里；“包含这些输入”与“恰好是这些输入”不是同一条件。

> 我的心得：同一道法则的几条限制，要一起守；不同分段分别守，最后再汇合。化简可以让路更清楚，却不能擦掉原式设下的门槛。

随手验一验　若 f 的定义域为 $[1,4]$，求 $f(x^2)$ 的定义域。

解　由 $1\le x^2\le 4$，得 $-2\le x\le -1$ 或 $1\le x\le 2$，故定义域为 $[-2,-1]\cup[1,2]$。

回验　我要找的变量是_____；哪些条件必须同时成立？_____

第一重 · 识关　函数的入口是什么

定义域是允许的输入组成的集合。例如，$f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 中，输入 2 使分母为零，不能进入。

题目　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ 与 $g(x)=\sqrt{3-x}$ 的定义域。

解　对 f，由 $x-2\neq 0$，得 $x\neq 2$，故定义域为

$$(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

对 g，由 $3-x\geq 0$，得 $x\leq 3$，故定义域为 $(-\infty,3]$。

> 化语为式：“分母不为零”写成 $x-2\neq 0$；“偶次根式有意义”写成被开方数不小于零。解出条件后，别忘了把结果写成集合。

对照练习　求 $\sqrt{x-1}$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域。两个答案的端点有什么不同？

入口总纲　一条运算，一条门规

先按题目出现的运算列条件；将来学到新的约束，再用另一种颜色补进留白。

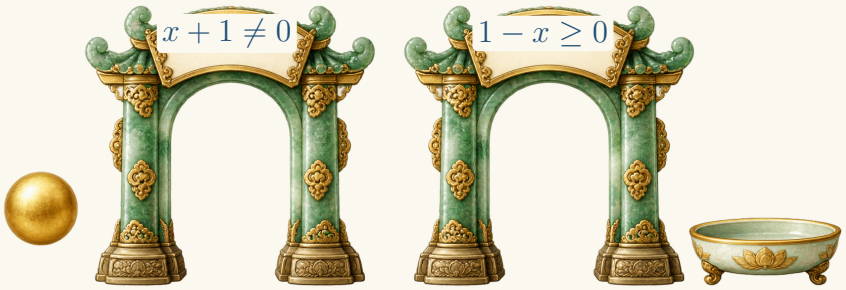
分式	每一个分母都不为零。
偶次根式	被开方数不小于零；若根式作分母，被开方数大于零。
奇次根式	根式本身对所有实数被开方数有意义。
零次幂与负整数次幂	底数不为零。
分数指数幂	按实数奇次根式解释，指数既约后，分母为偶数时：正指数要求底数不小于零，负指数要求底数大于零；分母为奇数时，负指数还要排除零。
对数	真数大于零；底数大于零且不等于 1。
指数	以正数为底的实数指数幂，指数可取实数。
正切	$\cos u \neq 0$，即 $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$，其中 k 为整数。
余切	$\sin u \neq 0$，即 $u \neq k\pi$，其中 k 为整数。
实际问题	运算有意义之外，还应符合数量的实际含义。

同时守关：几个运算同时出现，就让各条条件同时成立，取它们的公共部分。分段函数先各守本段，再合并各段的合法输入。

以后新学的运算：_____　条件：_____

第二重·守关　先列条件，再取交集

题目一　求函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}-\sqrt{1-x}$ 的定义域。



解　原式有意义，当且仅当

$$x+1\neq 0,\qquad 1-x\geq 0.$$

解得 $x\neq -1$ 且 $x\leq 1$，故函数的定义域为

$$\boxed{(-\infty,-1)\cup(-1,1].}$$

> 守住原式：虽然分式在 $x\neq -1$ 时可以约分，原式在 $x=-1$ 处仍无意义。化简不能把这个输入补回来。

题目二　求函数 $g(x)=\dfrac{(x+1)^0}{|x|-x}$ 的定义域。

解　由零次幂和分母分别有意义，得

$$x+1\neq 0,\qquad |x|-x\neq 0.$$

当 $x\geq 0$ 时 $|x|-x=0$；当 $x<0$ 时 $|x|-x=-2x>0$。因此 $x<0$，还要排除 $x=-1$，故定义域为

$$\boxed{(-\infty,-1)\cup(-1,0).}$$

守关 · 再进一招　两道根式，层层分母

题目一　求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解　两个根式同时有意义，当且仅当

$$x^2-1\geq 0,\qquad 1-x^2\geq 0.$$

所以 $x^2=1$，即 $x=-1$ 或 $x=1$。定义域为 $\{-1,1\}$。

> 共同过关：一个条件要求 x^2 不小于 1，另一个要求它不大于 1，因此只能等于 1。定义域也可能只有几个孤立的数。

题目二　求函数 $g(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 的定义域。

解　内层分母与外层分母都不能为零，因此

$$x\neq 0,\qquad 1+\frac{1}{x}\neq 0.$$

在 $x\neq 0$ 的条件下，第二个条件等价于 $x\neq -1$。所以定义域为

$$\boxed{(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty).}$$

一招再练　求 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 的定义域。

第三重 · 传关　输入换了，门规不变

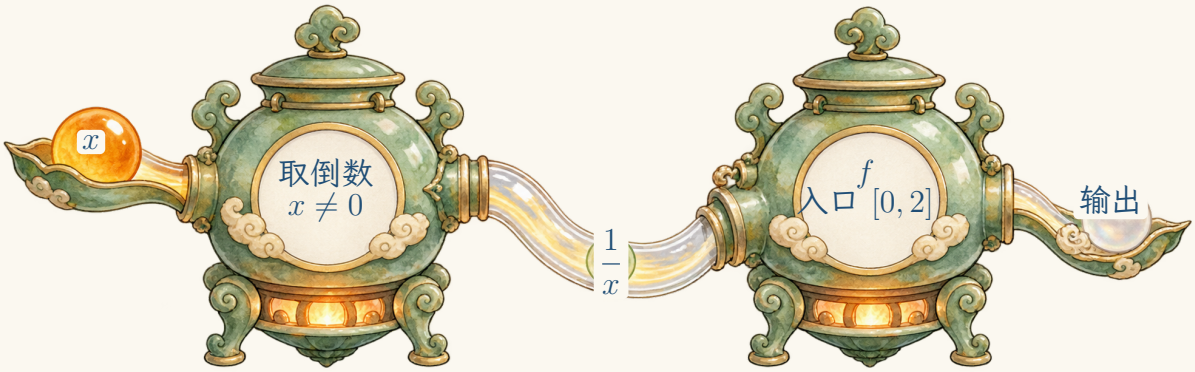
题目　已知函数 f 的定义域为 $[0,2]$，分别求 $f(x+1)$、$f(x^2)$ 的定义域。

解　对 $f(x+1)$，须有 $0\le x+1\le 2$，解得 $-1\le x\le 1$，故定义域为 $[-1,1]$。

对 $f(x^2)$，须有 $0\le x^2\le 2$，解得 $-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}$，故定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

> 化语为式：“原函数的定义域为 $[0,2]$”就是进入 f 的数必须在 $[0,2]$ 中。谁放在括号里，就检查谁。

题目　已知函数 f 的定义域为 $[0,2]$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域。



解　先要 $x\neq 0$，再要

$$0\le \frac{1}{x}\le 2.$$

由 $\dfrac{1}{x}\ge 0$ 且 $x\neq 0$，知 $x>0$；由 $\dfrac{1}{x}\le 2$，得 $x\ge \dfrac{1}{2}$。故定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$。

> 两次验身：先保证送入的式子有意义，再检查它的值能否进入原函数。

第四重·逆关　条件变，结论也变

题目　对函数 $f(x)=\sqrt{x-a}$，分别求满足下列条件的实数 a。

① 函数的定义域为 $[2,+\infty)$；　② 函数在 $[2,+\infty)$ 上有意义。

解　由 $x-a\geq 0$，得函数的定义域为 $[a,+\infty)$。

① 由 $[a,+\infty)=[2,+\infty)$，得 $a=2$。

② 要求每个不小于 2 的数都在定义域内，故 $a\leq 2$。

> 辨语言：“定义域为”比较两个完整的集合；“在指定区间上有意义”只要求该区间包含在定义域内。

题目　若 $f(x+1)$ 的自然定义域为 $[-1,1]$，求 f 的定义域。

解　令 $t=x+1$。由于 x 取遍实数时 t 也取遍实数，所以 f 有定义的所有输入，恰是 x 在 $[-1,1]$ 时 $x+1$ 的取值，故 f 的定义域为 $[0,2]$。

> 逆行先看覆盖：若换成 x^2，只看得到非负输入；负输入处有没有定义，不能由此确定。

逆关 · 参数　由入口找回规则

题目一　已知 $f(x)=\sqrt{x^2-ax+b}$ 的定义域为 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$，求实数 a,b。

解　根号内二次式开口向上，且在 $2,3$ 处为零，因此

$$x^2-ax+b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6.$$

比较系数，得 $\boxed{a=5,\quad b=6}$。

题目二　已知 $g(x)=\sqrt{ax+1}$ 在 $(-\infty,1]$ 上有意义，求实数 a 的取值范围。

解　当 $a>0$ 时，x 充分小时 $ax+1<0$，不合题意。当 $a\le 0$ 时，$ax+1$ 在 $(-\infty,1]$ 上的最小值为 $a+1$，故须有 $a+1\ge 0$。因此

$$\boxed{-1\le a\le 0.}$$

> 条件求参：“在指定区间上有意义”转化为根号内的式子在整个区间上恒不小于零。别漏掉 $a=0$ 的常数情形。

收功·回验　答完再对照

对照练习　$\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$；$\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1,+\infty)$。根式作分母时不能取零。

一招再练　由 $x+1\geq 0$ 且 $x-2\neq 0$，得定义域为 $[-1,2)\cup(2,+\infty)$。

自主检验　求 $\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ 的定义域。

解　由 $2-x\geq 0$ 且 $x^2-1\neq 0$，得 $x\leq 2$，且 $x\neq -1$、$x\neq 1$。故定义域为

$$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2].$$

回章首写下：我能解决_____。