开卷·修习图　值域篇

寻其源，识其本；炼其形，化其路。

函数的值域，是定义域中的输入经过对应法则后，实际得到的所有输出组成的集合。入口与法则一起决定结果。

第一重·寻源　追问值域从哪里来：同一法则换不同入口，看输出怎样变化；一类一类认识基础函数。

第二重·提炼　眼前的式子不熟悉，就观察、改写，揭出藏在其中的熟悉函数，再在正确的范围内研究它。

第三重·化转　一个复杂法则可以拆成几道熟悉的法则，找到由输入到输出的路径；每经过一道，就传递一次实际范围。

进阶·逆求与变化　由值域反求条件；让区间或对称轴移动，追踪关键位置，分情形求值域。

> 两条线，一起练：明线是寻源、提炼、化转；暗线是基础函数逐类入谱。研究一类，就记住它的图像、性质和不同入口带来的变化。

学成回填：我认识的函数_____；能解决的问题_____。

寻源·值域本义　结果从哪里来

题目　已知 $f(x)=x^2$，分别求定义域为 $\{-1,0,1\}$ 和 $[-1,1]$ 时的值域。

解　定义域为 $\{-1,0,1\}$ 时，三个输入对应的输出依次为 $1,0,1$，去掉重复的输出，得值域 $\{0,1\}$。

定义域为 $[-1,1]$ 时，函数值都在 $[0,1]$ 中；当输入从 0 变化到 1，平方值从 0 连续变化到 1，取得其间每一个值。故值域为 $[0,1]$。

> 寻源心法：值域不是从式子里直接抄出的“两个端点”，而是先看哪些输入能进来，再看它们经过法则后真正产生了哪些输出。同一法则，入口变了，结果可能变。

收果两问　第一，算出的结果有没有超出候选范围？第二，候选范围里的每一个结果能否由合法输入得到？两问合起来，才收全值域。

一题多问　对同一函数 $f(x)=x^2$，把输入范围改成 $[-1,2]$、$(0,2)$，值域分别是什么？先自己观察，再对照后面的“寻源”例题。

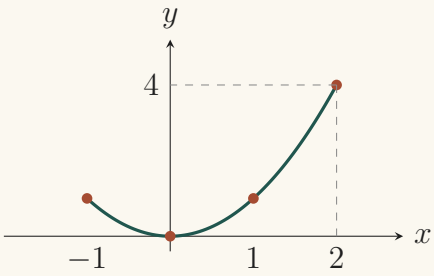
对照　第一问为 $[0,4]$；第二问为 $(0,4)$。第二问两端都不属于输入范围，且在正半轴上没有其他输入补回这两个输出。

第一重·寻源　值域究竟求什么

题目　已知 $f(x)=x^2$，分别求下列输入范围对应的值域：① $[-1,1]$；② $[-1,2]$。

解　① 当 $-1\le x\le 1$ 时，$0\le x^2\le 1$；随着 x 从 0 增大到 1，x^2 连续取遍 0 到 1，故值域为 $[0,1]$。

② 当 $-1\le x\le 2$ 时，最小值是 $f(0)=0$，最大值是 $f(2)=4$，中间的值也都能取到，故值域为 $[0,4]$。



观形收果：输入限制在哪里，就只看那一段图像；值域看的是这段图像覆盖的所有高度。

入谱 · 基础函数　研究一类，收录一类

题目　下表中的函数均取自然定义域。补出空白处的值域，再记录每类函数最值得留意的位置。

原型	定义域	值域	留意什么
$y=x$	实数集	实数集	变化方向
$y=x^2$	实数集	$[0,+\infty)$	最低点
$y=\dfrac{1}{x}$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	_____	两支分开
$y=\sqrt{x}$	$[0,+\infty)$	_____	起点
$y=\lvert x\rvert$	实数集	_____	折点

底谱如何用：先认识自然定义域上的函数，再看本题限定了哪些输入；底谱会随着学习继续生长。

新入谱的函数：_____　定义域与值域：_____

寻源·一次函数　斜率决定两端的次序

题目　已知 $f(x)=kx+b$，定义域为 $[m,n]$，其中 $m<n$。求 f 的值域。

解　当 $k>0$ 时，f 在 $[m,n]$ 上连续递增，值域为 $[km+b,kn+b]$。

当 $k<0$ 时，f 在 $[m,n]$ 上连续递减，值域为 $[kn+b,km+b]$。

当 $k=0$ 时，$f(x)=b$，值域为 $\{b\}$。

> 底谱先认清：斜率的正负决定输出两端的次序；常数函数只收一个输出。连续性保证本题端点之间的值都能取到。

寻源·逐点与分段　先确定输入，再收输出

题目一　已知 $f(x)=3x+1$，定义域为 $\{-1,0,1\}$，求值域。

解　$f(-1)=-2$、$f(0)=1$、$f(1)=4$，因此值域为 $\{-2,1,4\}$。

> 逐点求像：输入只有三个，输出也逐个计算；不能把三个数之间的空隙补成区间。

题目二　设

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & -2\le x\le -1,\\ x^2, & -1<x<2,\\ 5-\dfrac{x}{2}, & 2\le x\le 3. \end{cases}$$

求 f 的值域。

解　第一段的值域为 $[0,1]$；第二段包含 $x=0$，且 x^2 能取到 0 但取不到 4，值域为 $[0,4)$；第三段的值域为 $\left[\dfrac{7}{2},4\right]$。

合并各段的输出，得值域为 $\boxed{[0,4]}$。

> 各段先收，最后合并：第二段取不到 4，第三段在 $x=2$ 时却能取到 4，因此总值域包含 4。

基础函数·入谱　同一法则，不同入口

题目　已知 $f(x)=\dfrac{2}{x}$。分别求输入范围为 $[1,2]$、$[-2,-1]$、$(-3,0)\cup(0,1)$ 时的值域。

解　函数在每个半轴上分别连续且严格递减。

① 在 $[1,2]$ 上，$f(1)=2$，$f(2)=1$，故值域为 $[1,2]$。

② 在 $[-2,-1]$ 上，$f(-2)=-1$，$f(-1)=-2$，故值域为 $[-2,-1]$。

③ 在 $(-3,0)$ 上的值域为 $(-\infty,-\dfrac{2}{3})$；在 $(0,1)$ 上的值域为 $(2,+\infty)$。因此总值域为

$$\boxed{\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty).}$$

守界：反比例函数在两侧分别观察，不能跨过无定义的 0 把两支当成一个单调区间。

底谱留白　已熟悉的函数：_____；入口：_____。

输出：_____

寻源 · 反比例组练　同一法则，四种入口

题目　已知 $f(x)=\dfrac{k}{x}$，其中 $k>0$。分别求它在 $[1,2]$、$[-2,-1]$、$(-3,0)\cup(0,1)$ 和自然定义域上的值域。

解　函数在正、负半轴上分别连续递减。两支要分开观察。

① 当 $1\le x\le 2$ 时，$\dfrac{k}{2}\le f(x)\le k$，值域为 $\left[\dfrac{k}{2},k\right]$。

② 当 $-2\le x\le -1$ 时，$-k\le f(x)\le -\dfrac{k}{2}$，值域为 $\left[-k,-\dfrac{k}{2}\right]$。

③ 当 $-3<x<0$ 时，输出取遍 $\left(-\infty,-\dfrac{k}{3}\right)$；当 $0<x<1$ 时，输出取遍 $(k,+\infty)$。合并得值域

$$\left(-\infty,-\frac{k}{3}\right)\cup(k,+\infty).$$

④ 自然定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。每个非零实数 y 都可以由 $x=\dfrac{k}{y}$ 产生，而输出不可能是 0，故值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

我发现：同一反比例法则，正侧收正值，负侧收负值。端点开闭跟着实际输入走；跨过 0 时先分两支收果，再合并，不能把两支之间的空隙补上。

寻源·二次组练　一个顶点，三种站位

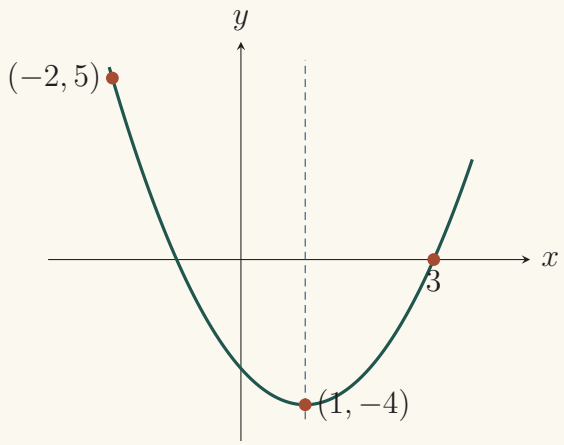
题目　设 $f(x)=x^2-2x-3$。分别求 f 在 $[-2,0]$、$[2,3]$、$[-2,1]$、$[-2,3]$ 上的值域。

解　$f(x)=(x-1)^2-4$，对称轴为 $x=1$，顶点为 $(1,-4)$。

① $[-2,0]$ 在轴左侧，函数递减。$f(-2)=5$，$f(0)=-3$，值域为 $[-3,5]$。

② $[2,3]$ 在轴右侧，函数递增。$f(2)=-3$，$f(3)=0$，值域为 $[-3,0]$。

③ $[-2,1]$ 的右端恰是顶点，函数递减，值域为 $[-4,5]$。④ $[-2,3]$ 横跨对称轴，最低点为顶点，最小值为 -4；两端分别为 5、0，最大值为 5。值域为 $[-4,5]$。各段结论中的中间值都由二次函数的连续性保证。



一类题的眼睛：先看区间在轴的左边、右边还是横跨轴；再找最低与最高从哪里来。若端点可以移动，转折点何时进来、两端何时等高，就成为分类依据。

进阶 · 动轴　分类由什么决定

题目　求函数 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在 $[0,2]$ 上的最小值，其中 a 为实数。

解　$f(x)=(x-a)^2-a^2-1$，对称轴为 $x=a$。

当 $a<0$ 时，函数在 $[0,2]$ 上递增，最小值为 $f(0)=-1$。

当 $0\le a\le 2$ 时，顶点落在区间内，最小值为 $f(a)=-a^2-1$。

当 $a>2$ 时，函数在 $[0,2]$ 上递减，最小值为 $f(2)=3-4a$。

因此最小值为

$$\begin{cases} -1, & a<0,\\ -a^2-1, & 0\le a\le 2,\\ 3-4a, & a>2. \end{cases}$$

分类有源：区间固定，对称轴随参数移动；轴在左、在内、在右，最低处分别落在左端、顶点、右端。



动轴·最大值　同一题，分类为何不同

题目　求函数 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在 $[0,2]$ 上的最大值，其中 a 为实数。

解　因为抛物线开口向上，闭区间上的最大值在端点取得。比较两端：

$$f(2)-f(0)=(3-4a)-(-1)=4-4a.$$

当 $a\le 1$ 时，$f(2)\ge f(0)$，最大值为 $3-4a$；当 $a>1$ 时，$f(0)>f(2)$，最大值为 -1。因此

$$\boxed{\begin{cases}3-4a, & a\le 1,\\ -1, & a>1.\end{cases}}$$

对照最小值：最小值先看轴是否落入区间，分界是 0、2；最大值比较两端，分界是 1。分类要跟着所求走。

进阶·动区间　轴不动，入口在走

题目　求函数 $f(x)=x^2-2x-1$ 在 $[t,t+1]$ 上的最小值，其中 t 为实数。

解　配方得 $f(x)=(x-1)^2-2$，对称轴为 $x=1$。

当 $t<0$ 时，区间在轴左侧，函数递减，最小值为 $f(t+1)=t^2-2$。

当 $0\le t\le 1$ 时，区间包含轴，最小值为 $f(1)=-2$。

当 $t>1$ 时，区间在轴右侧，函数递增，最小值为 $f(t)=t^2-2t-1$。

> 动轴与动区间：轴动时比较轴与固定端点；区间动时比较两个端点与固定的轴。分类依据仍是轴和区间的相对位置。

动区间 · 变式　一端固定，一端移动

题目　设 $t \geq -2$，求函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 在 $[-2, t]$ 上的值域。

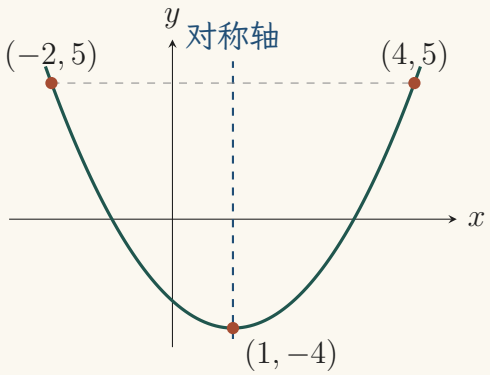
解　$f(x) = (x-1)^2 - 4$，对称轴为 $x = 1$，且 $f(-2) = 5$。

当 $-2 \leq t \leq 1$ 时，函数在该区间上递减，值域为 $[f(t), 5]$。

当 $1 < t \leq 4$ 时，区间含顶点，最小值为 -4；右端到轴的距离不大于左端到轴的距离，最大值为 5，值域为 $[-4, 5]$。

当 $t > 4$ 时，右端到轴更远，最大值为 $f(t)$，值域为 $[-4, f(t)]$，其中 $f(t) = t^2 - 2t - 3$。

两种分界：右端经过轴 $x = 1$ 时最小值的来源变化；右端到轴的距离超过左端时，最大值的来源变化。



右端到 1 时收进最低点；到 4 时与左端等高。

寻源·根式与绝对值　入口、起点与折点

题目　分别求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $[1,4)$ 上，以及 $y=|x-1|$ 在 $[-1,3]$ 上的值域。

解　$\sqrt{x}$ 在 $[1,4)$ 上连续递增，输入 1 产生 1；输入接近 4 而取不到 4，输出接近 2 而取不到 2，故值域为 $[1,2)$。

对 $y=|x-1|$，折点 $x=1$ 在 $[-1,3]$ 内，最小值为 0；两端的函数值均为 2，中间的值都能取到，故值域为 $[0,2]$。

> 先看入口：根式先验定义域，绝对值先找折点；再把实际限定的区间放上去观察。

第二重·提炼　把陌生的式子认成熟面孔

题目一　求函数 $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ 在 $[2,4)$ 上的值域。

解　分离常数，得 $y=3+\dfrac{5}{x-1}$。由 $2\le x<4$，得 $1\le x-1<3$，所以

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}\le 1.$$

于是 $\dfrac{14}{3}<y\le 8$，值域为 $\boxed{\left(\dfrac{14}{3},8\right]}$。

> 提炼之眼：分离常数之后，看见的是熟悉的反比例函数；输入范围和端点能否取到仍要跟着走。

题目二　求函数 $y=\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}$ 的值域。

解　由根式有意义得 $1\le x\le 3$。在该区间上，$\sqrt{x-1}$ 递增，$-\sqrt{3-x}$ 也递增，因此 y 连续且严格递增。代入端点得最小值 $-\sqrt{2}$、最大值 $\sqrt{2}$，故值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

提炼·根式对照　先看根号里的二次函数

题目　分别求 $y=\sqrt{x^2-2x+3}$ 与 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的值域。

解　① $x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，当 x 取遍实数时，根号内取遍 $[2,+\infty)$，因此值域为 $[\sqrt{2},+\infty)$。

② $x^2-2x-3=(x-1)^2-4$。原式有意义时，根号内不小于 0；当 $x\geq 3$ 时，这个二次式连续取得从 0 开始的所有非负数。因此根号内的实际范围为 $[0,+\infty)$，值域也为 $[0,+\infty)$。

基础对照　$y=\sqrt{x}+1$ 中根号取遍 $[0,+\infty)$，整体加 1，值域为 $[1,+\infty)$；$y=\sqrt{x+1}$ 中输入须满足 $x\geq -1$，根号内取遍 $[0,+\infty)$，故值域为 $[0,+\infty)$。

> 提炼心得：两个陌生根式都先认出二次函数。第一题的根号内始终为正；第二题必须先守住非负的入口，不能把二次函数在全体实数上的值域直接当成根号内的实际范围。

再进一步　根号内的式子换成 x^2-ax+2，若根式的值域为 $[0,+\infty)$，什么时候能取到 0？后面的“由果逆寻”会接着解。

提炼·有理化　看不清走势，换个样子

题目　求函数 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ 的值域。

解　由根式有意义，得 $x\geq 1$。有理化得

$$y=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}.$$

分母在 $[1,+\infty)$ 上连续递增，最小值为 $\sqrt{2}$，且可以任意大。因此 y 的值域为 $\boxed{(0,\sqrt{2}]}$。

> 提炼之眼：两个根式相减不易直接判断；有理化后，分母的方向清楚了。输出接近零但始终为正。

提炼 · 换元　根式换成二次函数

题目　求函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域。

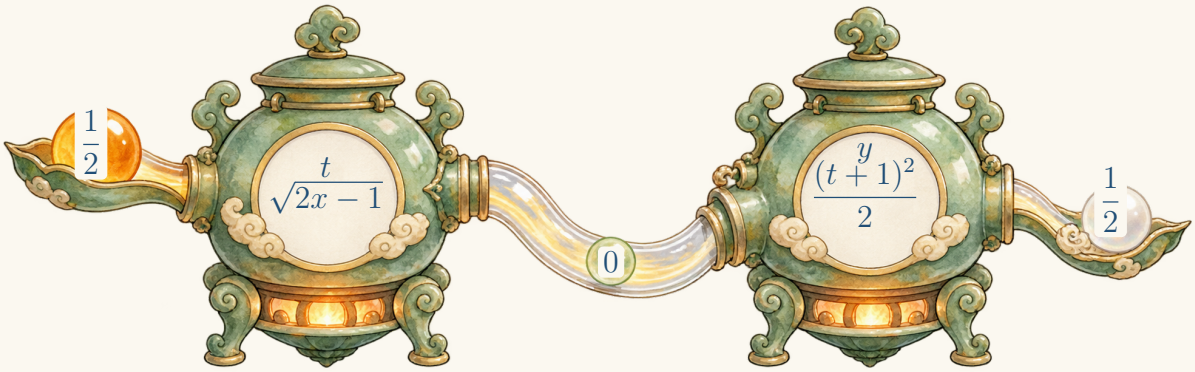
解　由 $2x-1\geq 0$，得 $x\geq \dfrac{1}{2}$。令 $t=\sqrt{2x-1}$，则 $t\geq 0$，且 $x=\dfrac{t^2+1}{2}$，于是

$$y=\frac{t^2+1}{2}+t=\frac{(t+1)^2}{2}.$$

当 $t\geq 0$ 时，y 随 t 增大而增大，最小值为 $\dfrac{1}{2}$；且可取到所有不小于 $\dfrac{1}{2}$ 的值。所以值域为

$$\boxed{\left[\frac{1}{2},+\infty\right)}.$$

提炼看本色：令根式为新变量后，原式化为熟悉的二次函数；同时传递实际范围 $t\geq 0$。换元是工具，也可以用来连接多道法则。



图中以 $x=\dfrac{1}{2}$ 为例；完整范围依次为 $x\geq\dfrac{1}{2}$、$t\geq 0$、$y\geq\dfrac{1}{2}$。

一招再练　求 $y=\dfrac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+2}$ 的值域。

提炼 · 倒数换元　化成熟悉的二次函数

题目　求函数 $y=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2}$ 的值域。

解　原式有意义要求 $x\neq 0$。先变形：

$$y=1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}.$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $t\neq 0$，且每个非零实数 t 都能取到。于是

$$y=1-2t-t^2=2-(t+1)^2.$$

当 $t=-1$ 时，$y=2$；随 $|t|$ 增大，y 可以任意小。对任意 $y<2$，方程 $(t+1)^2=2-y$ 至少有一个非零实数根。因此值域为

$$\boxed{(-\infty,2].}$$

> 排除的是输入：$t=0$ 被排除，并不意味着对应的输出 1 必须排除；$t=-2$ 也能得到 1。

提炼·认对钩　等号也要到场

题目　求函数 $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的值域。

解　令 $t=x+1$，则 $t>0$，且每个正数 t 都能取到。于是

$$y=t+\frac{1}{t}\geq 2.$$

当 $t=1$，即 $x=0$ 时取等号。函数在 $[0,+\infty)$ 上连续，且当 x 增大时可以任意大，因此值域为 $\boxed{[2,+\infty)}$。

> 先验等号：不等式给出下界，还要检查等号对应的输入是否合法；本题再借连续性说明下界以上的数都能取到。

提炼·变式对照　分母里的平方，守住不能取零

题目　求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$ 的值域。

解　配方得 $x^2-2x+1=(x-1)^2$。由分母不为零，得 $x\neq 1$。

设 $t=(x-1)^2$。因为 $x\neq 1$，所以 $t>0$；反过来，每个正数 t 都能由 $x=1+\sqrt{t}$ 产生。因此 t 的实际范围为 $(0,+\infty)$。

于是 $y=\dfrac{1}{t}$。当 t 取遍所有正数时，y 也取遍所有正数，故值域为 $\boxed{(0,+\infty)}$。

对照前题：换元后应先认出熟悉函数，再追问原来的限制落到了哪里。本题被排除的 $t=0$ 恰是分母为零的位置；不能把它补回。

第三重 · 化转　复杂法则，拆成看得懂的几步

一道未明，就拆成几道；每过一关，范围跟着走。

题目　求函数 $y=\dfrac{2\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+2}$ 的值域。

解　第一道是平方根：由 $x\ge 0$，令 $t=\sqrt{x}$，则 t 取遍 $[0,+\infty)$。

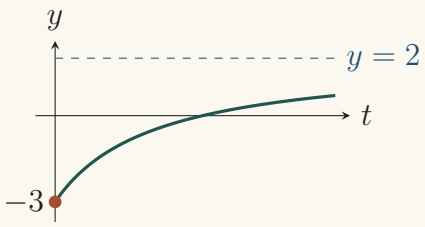
第二道是一次分式：

$$y=\frac{2t-6}{t+2}=2-\frac{10}{t+2}.$$

当 t 从 0 增大时，$t+2$ 从 2 起增大，$\dfrac{10}{t+2}$ 从 5 起减小并趋近 0，但不为 0。因此 y 从 -3 开始增大，趋近 2 但不取到 2。这道分式在 $[0,+\infty)$ 上连续，故值域为

$$\boxed{[-3,2).}$$

> 化转心得：先把 x 送过根号，收下 t 的全部可能；再把 t 送过一次分式，收下 y 的全部可能。每一道只处理一种熟悉法则，但前一步的输出范围决定后一步的入口。



接着对照　若第一道改为 $t=\sqrt{x-1}$，输入 $x\ge 1$ 仍使 t 取遍 $[0,+\infty)$，后一道不变，值域仍为 $[-3,2)$。

回验　输出 -3 由 $t=0$ 取得；输出 2 要求 $\dfrac{10}{t+2}=0$，不能取得。取不到的输入端和取不到的输出端都要交代。

化转·整体换元　一颗整体出现两次

题目　求函数 $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+3}$ 的值域。

解　令 $t=(x-1)^2$，则 $t\geq 0$，且每个非负数都能取到。因为 $x^2-2x=t-1$，所以

$$y=\frac{t-1}{t+2}=1-\frac{3}{t+2}.$$

由 $t\geq 0$ 得 $0<\dfrac{3}{t+2}\leq\dfrac{3}{2}$，于是 $-\dfrac{1}{2}\leq y<1$。左端在 $x=1$ 时取到，且新变量的合法范围产生全部中间值，故值域为

$$\boxed{\left[-\frac{1}{2},1\right).}$$

化转与提炼会通：先将重复的二次结构收成 t，再分离常数，认出反比例原型。

化转 · 根式分母　先找根号内，再看倒数

题目　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的值域。

解　原式有意义时，$-x^2+x+2>0$，解得 $-1<x<2$。配方得

$$-x^2+x+2=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

在 $(-1,2)$ 上，这个二次式取遍 $\left(0,\dfrac{9}{4}\right]$，最大值在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时取到。因此根号取遍 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$，再取倒数得到

$$\boxed{\left[\frac{2}{3},+\infty\right).}$$

逐层传域：先确定根号内二次式的范围，再过根号和倒数两道法则。分母不能为零，因此二次式接近零但不能取零。

进阶·逆行导览 已知结果，反寻来路

收果之后，还能循果寻源。

正向求值域，是从允许的输入出发，经过对应法则，收集实际输出。逆行则从已有的结果或条件出发，反问：哪些输入能产生它？参数或定义域又该怎样确定？

第一路·由果定参　已知值域，求参数的取值范围。

先看目标值域的边界怎样产生，特别是边界能否取到；用这一条件约束参数，再验证整个值域恰好符合要求。后面的根式函数题，要从“输出能否等于 0”追查根号内的二次式。

第二路·由果寻源　已知某个输出或输出范围，寻找合法输入。

先排除不可能的输出，再看允许的每一个输出是否有来源。若题目要求“所有满足条件的输入”，须把全部符合条件的输入找全。

第三路·由果选域　已知法则和目标值域，选择定义域。

先找每个目标输出所有可能的来源，再从中选输入：每个目标输出至少有一个来源，所选输入也不能产生目标之外的输出。不同的选择可能得到不同的定义域。

> 逆行心法：同一个输出可能有多个来源。“找全部符合条件的输入”，是全部收下；“选择定义域使值域恰好等于目标”，是按要求选择，二者不同。

带着问题读题组　输出能否到达？所有目标是否收全？有没有多收？边界在哪里取到？

回填　我能从值域反求：_____

进阶·由果逆寻　值域条件反求参数

题目　函数 $f(x)=\sqrt{x^2-ax+2}$ 取自然定义域。若它的值域为 $[0,+\infty)$，求实数 a 的取值范围。

解　根号函数的输出不小于零；根号内的二次式开口向上且无上界。输出能取到 0，当且仅当二次式有实根，即

$$\Delta=a^2-8\geq 0.$$

因此 $a\leq -2\sqrt{2}$ 或 $a\geq 2\sqrt{2}$。当这一条件成立时，二次式在某个零点及其右侧连续取遍 $[0,+\infty)$，故根式的值域确为 $[0,+\infty)$。

辨题意：本题只保留根号内非负的输入；它与“定义域为全体实数”的要求不同，不能把两个条件混同。

逆求·同题变条件　先辨入口，再论输出

题目　设 $q(x)=x^2-2ax+2$。分别求满足下列条件的实数 a：① q 在实数集上的值域为 $[0,+\infty)$；② $\sqrt{q(x)}$ 取自然定义域，其值域为 $[0,+\infty)$。

解　因为 $q(x)=(x-a)^2+2-a^2$。

① q 的最小值必须是 0，故 $2-a^2=0$，得 $\boxed{a=\pm\sqrt{2}}$。

② 根号内允许的部分要求 $q(x)\geq 0$。输出必须取到 0，等价于 $q(x)=0$ 有实根，即 $4a^2-8\geq 0$。又 q 开口向上，在零点右侧取遍所有非负数，故 $\boxed{a\leq -\sqrt{2}\text{ 或 }a\geq\sqrt{2}}$。

> 看准法则和入口：第一问保留二次函数的全部输入；第二问只从根号有意义的输入收取输出。

逆行 · 输出寻输入　验证每个输出可达

题目　求函数 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的值域。

解　原式有意义时 $y\ge 0$。反过来，任取 $y\ge 0$，由

$$x^2-2x-3=y^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-1)^2=y^2+4,$$

可得实数 $x=1+\sqrt{y^2+4}$。此时原式有意义，且函数值恰为 y。所以值域为 $\boxed{[0,+\infty)}$。

> 反寻输入：先说明哪些输出不可能；再对允许范围内的每一个输出，找到合法输入。两步合起来才得到完整值域。

逆行·选入口　输出相同，输入可以不同

题目　设函数 f 的法则为 $f(x)=x^2$，其定义域是实数集的子集。若值域恰为 $\{0,1,2\}$，这样的定义域共有多少个?

解　值域含 0，因此必须选输入 0；产生 1 的输入是 $-1,1$，至少选一个，有 3 种选法；产生 2 的输入是 $-\sqrt{2},\sqrt{2}$，至少选一个，也有 3 种选法。不能再选产生其他输出的输入。

因此满足条件的定义域共有 $1\times3\times3=\boxed{9}$ 个。

> 原像与选择：先找能产生目标输出的所有候选输入，再保证每个目标输出至少有一个来源；候选输入不必全部选入。

逆行·限定输出　从结果反找全部输入

题目　已知 $f(x)=x^2$，求满足 $1\le f(x)\le 2$ 的所有实数 x。

解　由 $1\le x^2\le 2$，得 $1\le |x|\le \sqrt{2}$，所以所有满足条件的输入组成的集合为

$$\boxed{[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}].}$$

与上一题相辨：本题要找全部符合限制的输入；上一题要从候选输入中选择定义域，使每种指定输出至少出现一次。

收功·回验 方法与底谱一起回填

基础函数入谱　反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的值域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$\sqrt{x}$ 和 $|x|$ 的值域都是 $[0,+\infty)$。

二次函数再练　$f(x)=(x-1)^2-4$ 在 $[-2,3]$ 上，最小值为 -4，最大值为 5，值域为 $[-4,5]$。

化转再练　令 $t=\sqrt{x}\geq 0$，则 $y=\dfrac{2t-6}{t+2}=2-\dfrac{10}{t+2}$。因为 $t+2\geq 2$，所以 y 的值域为 $[-3,2)$。

收果四问　入口是什么？用哪种方法？端点能否取到？中间有没有遗漏？

我新认识的基础函数：_____

我学会的方法：_____

我还需要练习：_____