开卷·修习图 解析式篇

以不变应万变，认准输入再出招。

解析式把对应法则写成式子。会用式，能按规则求值；会求式，能从条件找回规则。

根基·等量代换　认整体，换每处；法则不变，入口要验。

第一路·运用四类　一招一式、左右互搏、有招有式、无招有式。

第二路·求式五招　破箭、破定、破逆、破快、破无。

进阶·对招　规范方法先练稳，再看目标能否引出巧解。

> 修习留白：每练成一招，写下题型、第一步，以及不能丢掉的条件。

我最熟悉的招式：_____

我还需回练：_____

求式·选招心法　看清条件，才知道从哪儿破

根基｜等量代换　输入换成什么，原法则中的输入就整体换成什么；每一处都换，允许的输入仍要检查。

破箭式｜直接法　已知两道法则，求复合函数的法则：先求第一道的输出，再判断它能否进入第二道。分段时要看中间结果落在哪一段。

破定式｜待定系数法　已知函数的形式而系数未知：先设出符合条件的式子，再把条件翻译成方程或方程组，求出系数并检验。

破逆式｜换元法　已知 $f(g(x))$，能由 $t=g(x)$ 反解原变量时，换元并代回；t 的范围由原输入能到的位置决定。

破快式｜配凑法　式子的整体结构能够直接凑成目标：先找共同部件，再整体替换；不可只换局部，也要核对范围。

破无式｜构造方程组法　已知关系含有多个未知函数值：寻找合适替换，另造关系，联立消元；最后检验所得式子。

> 我的心得：先问“题目已知法则，还是要求法则？”再看条件给的是模型、整体，还是多个相互牵连的函数值。规范方法是根基，能抓住目标再走巧路。

随手验一验　已知 $f(x+1)=2x+3$，求 $f(t)$。

解　设 $t=x+1$，则 $x=t-1$；所以 $f(t)=2(t-1)+3=2t+1$，其中 t 为任意实数。

根基·等量代换　整颗送入，规则不变

题目　已知 $f(t)=t^2+t$，定义域为 $[0,2]$，求 $f(x+1)$ 的解析式及定义域。

解　把 $x+1$ 代入原法则，得

$$f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)=x^2+3x+2.$$

由 $0\le x+1\le 2$，得 $-1\le x\le 1$。因此所求解析式为

$$\boxed{f(x+1)=x^2+3x+2,\qquad -1\le x\le 1.}$$

守法：原法则中每一处 t 都换成同一个整体 $x+1$。定义域限制的是送进 f 的数。



对照练习　同样的 f，求 $f(x^2)$ 的解析式及定义域。

运用一·一招一式　给出法则，换输入

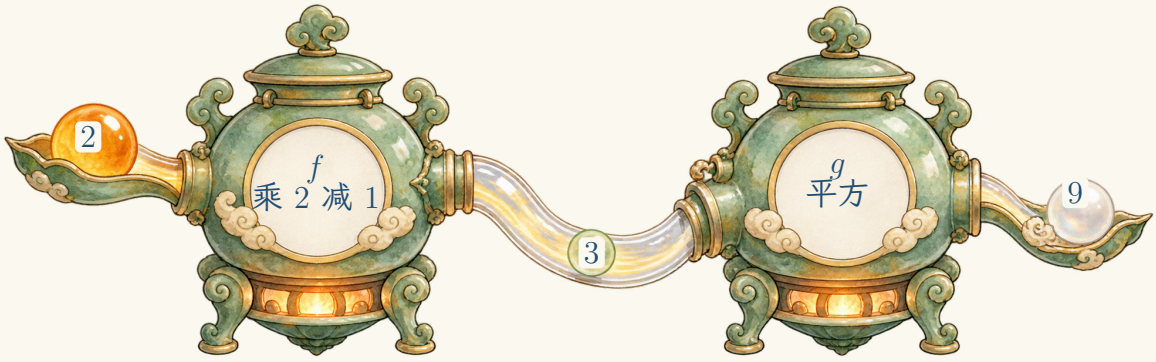
题目　已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2$，分别求 $g(f(2))$ 与 $f(g(2))$。

解　因为 $f(2)=2\times 2-1=3$，所以 $g(f(2))=g(3)=9$。

因为 $g(2)=2^2=4$，所以 $f(g(2))=f(4)=7$。

> 九转之力：先求前一道的输出，再把它作为下一道的输入。顺序不同，结果一般不同。

看一看　输入 2，先经 f，再经 g。



第一次的输出 3，就是第二次的输入。

运用二·左右互搏　每次都看当前输入

题目一　设 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$ 解方程 $f(x)=2$。

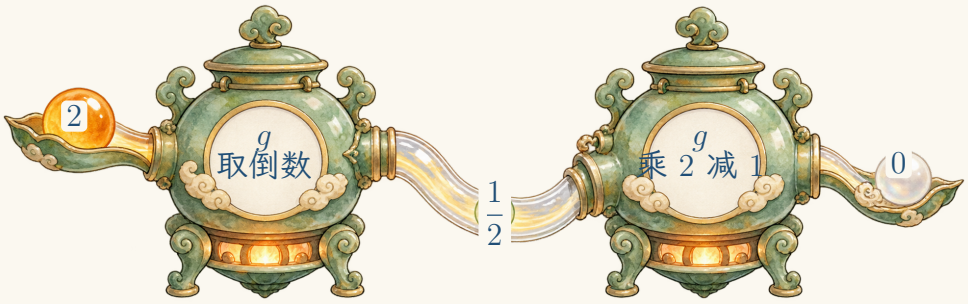
解　当 $x\le 1$ 时，$x^2-x=2$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$，只有 $x=-1$ 符合本段条件。

当 $x>1$ 时，$x-1=2$，解得 $x=3$，符合本段条件。

因此方程的解为 $\boxed{x=-1 \text{ 或 } x=3}$。

> 分段验身：每段算出的候选值，都要放回本段的输入范围检查。

题目二　设 $g(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$ 求 $g(g(2))$。



解　由于 $2\ge 1$，得 $g(2)=\dfrac{1}{2}$。又 $\dfrac{1}{2}<1$，所以

$$g(g(2))=g\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-1=0.$$

> 一炉又一炉：第二次送入的是第一次的输出，必须重新判断属于哪一段。

运用三·有招有式　对准目标输入

题目　已知对所有实数 x 都有 $f(2x)=2x^2$，求 $f(1)$。

解　令 $2x=1$，得 $x=\dfrac{1}{2}$。代入已知关系，得

$$f(1)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

> 化语为式：要求 $f(1)$，就让条件中的输入 $2x$ 等于 1；解出的 x 还须满足题设范围。

变式　已知 $f(x)=x+4$，且对所有实数 x 有 $f(ax+b)=x+10$，求 $a+b$。

解　令 $x=1$，得 $f(a+b)=11$。由 $f(t)=t+4$，得 $a+b=7$。

练功留白　如果第一个题目的条件只在 $x\geq 1$ 时成立，能否由此确定 $f(1)$？为什么？

进阶·特殊输入返求　经典题的两条路

题目　已知 $f(x)=x^2+4x+3$，且对所有实数 x 有 $f(ax+b)=x^2+10x+24$，求 $5a-b$。

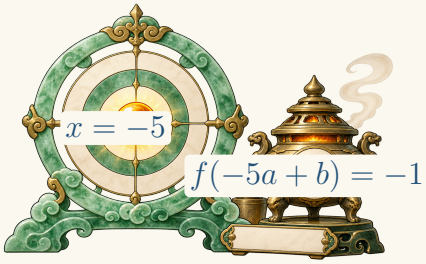
解法一·目标代值　令 $x=-5$，代入已知关系，得

$$f(-5a+b)=25-50+24=-1.$$

又 $f(t)=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$，由 $f(-5a+b)=-1$ 得 $-5a+b=-2$，因此

$$\boxed{5a-b=2.}$$

> 破局一眼：所求的相反数恰是 $x=-5$ 时括号里的整体。先求此时函数值，再由函数法则返求输入。



解法二·等量代换与比较系数　由题意，对所有实数 x，

$$(ax+b)^2+4(ax+b)+3=x^2+10x+24.$$

比较系数得 $a^2=1$、$2a(b+2)=10$、$(b+2)^2=25$。解得 $(a,b)=(1,3)$ 或 $(-1,-7)$，两组均满足原式，且都得到 $5a-b=2$。

运用四·无招有式　赋值建立联系

题目一　函数 f 在正实数上定义，且对任意正数 x, y，都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$。求 $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，其中 $x > 0$。

解　令 $x = y = 1$，得 $f(1) = 2f(1)$，所以 $f(1) = 0$。

因为 $x > 0$，$\dfrac{1}{x}$ 也是正数，代入关系式得

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0.$$

> 赋值生联系：先找到基准值 $f(1)$，再让两个输入的乘积等于 1。

题目二　函数 f 在实数范围上处处非零，且对所有实数 x 有 $f(x+1) = \dfrac{1}{f(x)}$。已知 $f(1) = -5$，求 $f(f(5))$。

解　由题意，$f(x+2) = \dfrac{1}{f(x+1)} = f(x)$。于是 $f(5) = f(1) = -5$，且 $f(-5) = f(1) = -5$，因此 $f(f(5)) = -5$。

求式一·破箭式　先求组合规则

题目一　已知 $f(x)=2x-1$，$g(x)=x^2$，求 $f(2x-1)$、$f(g(x))$ 与 $g(f(x))$ 的解析式。

解　按法则依次代入，得到

$$\begin{aligned} f(2x-1) &= 2(2x-1)-1 = 4x-3,\\ f(g(x)) &= 2x^2-1,\\ g(f(x)) &= (2x-1)^2. \end{aligned}$$

由值到式：求解析式要写出输入变化时的完整规则；每一道仍先认清当前输入。

破箭·再进一招　直接代入，分段守界

题目二　设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0,\\ -x^2, & x<0,\end{cases}\qquad g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{u}, & u>0,\\ u^2, & u\leq 0.\end{cases}$$

求 $g(f(x))$ 的解析式。

解　当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2>0$，故 $g(f(x))=\dfrac{1}{x^2}$。

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2<0$，故 $g(f(x))=(-x^2)^2=x^4$。

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，$g(0)=0$。因此

$$\boxed{g(f(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x^4, & x<0.\end{cases}}$$

破箭心法：先看 f 输出什么，再由输出决定 g 使用哪一段；边界单独核对。

求式二·破定式　题目给模，条件定形

题目　已知 $f(x)$ 是一次函数，且对所有实数 x 有 $f(f(x))=2x+1$，求 $f(x)$。

解　设 $f(x)=kx+b$，其中 $k\neq 0$，则

$$f(f(x))=k^2x+(k+1)b=2x+1.$$

比较系数得 $k^2=2$，$(k+1)b=1$。解得

$$(k,b)=(\sqrt{2},\sqrt{2}-1)\quad 或\quad (-\sqrt{2},-\sqrt{2}-1).$$

这两组均满足题设，因此

$$\boxed{f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1\quad 或\quad f(x)=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}-1.}$$

> 设式有据：只有题目给出一次函数，才有依据设 $kx+b$。代入恒等式后，再按系数建立方程。

一招再练　已知二次函数 $g(x)$ 满足 $g(0)=1$，且对所有实数 x 有 $g(x+1)-g(x)=2x$，求 $g(x)$。

求式三·破逆式　设新输入，反解旧量

题目　对所有实数 x，$f(x+1)=x^2-2x$，求 $f(x)$。

解　令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，且 t 可取遍实数。因此

$$f(t)=(t-1)^2-2(t-1)=t^2-4t+3.$$

将变量 t 改写为 x，得 $\boxed{f(x)=x^2-4x+3}$，定义域为实数集。

> 换元三步：设整体、反解原变量、代回原关系；新变量能到哪里，也要一起写清。

对照题　对所有 $x\geq 0$，$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$。求由题设能确定的 f 的解析式。

解　令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $t\geq 1$，且 $\sqrt{x}=t-1$。故

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1.$$

所以 $f(x)=x^2-1$，其中 $x\geq 1$；题设不能确定 $x<1$ 时的函数值。

求式四·破快式　识整体，配熟式

题目　对所有 $x \geq 0$，$f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$。求由题设能确定的 f 的解析式。

解　因为

$$x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}+1)^2 - 1,$$

所以 $f(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}+1)^2 - 1$。令 $t = \sqrt{x}+1$，则 t 的取值范围是 $[1, +\infty)$，故

$$\boxed{f(x) = x^2 - 1, \qquad x \geq 1.}$$

两路对照：破逆式反解旧量，破快式把右边配成输入整体的形式。观察得快，范围仍要写。

原稿变式　对所有非零实数 x，$f\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$。求 f 在题设所确定范围内的解析式。

解　因为 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2$，而 $x - \dfrac{1}{x}$ 可取遍实数，所以 $f(x) = x^2 + 2$，定义域为实数集。

范围凭什么：对任意实数 t，方程 $x^2 - tx - 1 = 0$ 有非零实根，故存在非零 x 使 $x - \dfrac{1}{x} = t$。

求式五·破无式　另造关系，联立消元

题目　对所有非零实数 x，都有 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-x$。求 $f(x)$。

解　用 $\dfrac{1}{x}$ 替换 x，得

$$\begin{cases} 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-x, \\ f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

第一式乘 2 减去第二式，得 $3f(x)=-2x+\dfrac{1}{x}$。因此

$$\boxed{f(x)=\frac{-2x+\dfrac{1}{x}}{3},\qquad x\neq 0.}$$

双式相解：倒数的倒数回到原输入，两个函数值互换位置；替换前必须保证新输入仍在题设范围内。

一招再练　对所有实数 x，$f(x)+2f(1-x)=x$。求 $f(x)$。

收功·对照　把招式用到新题

等量代换　$f(x^2)=x^4+x^2$，定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

目标代值留白　只给 $x\geq 1$ 时，$2x\geq 2$，题设未约束 $f(1)$，不能据此确定。

破定式练习　设 $g(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$。由 $g(0)=1$ 得 $c=1$，由 $g(x+1)-g(x)=2ax+a+b=2x$ 得 $a=1,b=-1$，故 $g(x)=x^2-x+1$。

破无式练习　换 x 为 $1-x$，得 $f(1-x)+2f(x)=1-x$。联立可得 $f(x)=\dfrac{2-3x}{3}$；代回原关系可验证。

> 收招四问：输入是否合法？整体换全了吗？结论覆盖哪些输入？答案能否回到原条件？

回章首写下：我能解决_____。